

N° D'ORDRE :

1538.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. H. VERGNE,

Ingénieur des Arts et Manufactures.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ONDES LIQUIDES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 Mai 1909, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*

BOUSSINESQ, { *Examineurs.*
E. PICARD, {

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

N° D'ORDRE :

1538.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. H. VERGNE,

Ingénieur des Arts et Manufactures.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ONDES LIQUIDES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 Mai 1909, devant la Commission d'examen.



MM. P. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, { *Examineurs.*
E. PICARD, {

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL.....	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, professeur,	Géométrie supérieure.
	L. TROOST.	
PROFESSEURS HONORAIRES ..	CH. WOLF.	
	RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	PELLAT.....	Physique.
PROFESSEURS	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique Id.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	LE CHATELIER.....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	N.....	Zoologie, Anatomie. Physio- logie comparée.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
PROFESSEURS ADJOINTS	HADAMARD.....	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	BOUVEAULT.....	Chimie organique.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	PRUVOT.....	Anatomie comparée.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

A

MESSIEURS J. BOUSSINESQ ET É. PICARD,

MEMBRES DE L'INSTITUT.

Hommage de profonde et respectueuse reconnaissance.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550419_0034

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE DES ONDES LIQUIDES.

HISTORIQUE.

Une masse liquide pesante, renfermée dans un vase fixe, est au repos : on la met en mouvement par l'action de forces impulsives appliquées à sa surface, ou par l'émersion d'un corps solide ; les oscillations que subit alors la masse liquide sont dites ondes *par impulsion* dans le premier cas, ondes *par émersion* dans le second. C'est l'étude de pareilles ondes que nous avons en vue.

Un cas particulièrement intéressant sera celui où, les dimensions du vase étant censées infinies, le fluide pourra être supposé illimité, tant dans le sens horizontal que dans le sens de la profondeur.

Laplace est le premier qui ait cherché à soumettre cette question à l'analyse (1776) ; il forme les équations différentielles du mouvement des fluides incompressibles pesants, en supposant que les déplacements et les vitesses des molécules sont des infiniment petits du premier ordre, dont il néglige les carrés et produits ; cette hypothèse a d'ailleurs été conservée par tous ceux qui, depuis, ont abordé le même problème. Laplace se borne à étudier le cas d'un mouvement plan, le liquide étant primitivement au repos, et sa surface ayant reçu une forme sinusoïdale.

Environ 10 ans après, Lagrange traita le cas où la profondeur du fluide est supposée très petite et constante. Il démontre qu'alors la propagation des ondes a lieu suivant des lois analogues à celles du son : la vitesse de propagation est constante et proportionnelle à la racine carrée de la profondeur. Il suppose ensuite que la profondeur est quelconque, mais que le mouvement excité à la surface ne se transmet qu'à une très petite profondeur; d'où il conclut que son analyse subsiste pour le cas d'une profondeur quelconque, et qu'une onde se propage avec une vitesse proportionnelle à la racine carrée de la profondeur à laquelle le mouvement cesse d'être sensible; nous verrons que cette conclusion n'est pas légitime; car, outre que le mouvement ne cesse pas brusquement à un niveau déterminé, il se transmet dans toute la masse fluide, et est encore sensible à des distances notables de sa surface.

En 1815, l'Académie des Sciences proposa comme sujet de concours le problème suivant : « Une masse fluide pesante, primitivement en repos et d'une profondeur indéfinie, a été mise en mouvement par l'effet d'une cause donnée. On demande, au bout d'un temps déterminé, la forme de la surface extérieure du fluide et la vitesse de chacune des molécules situées à cette même surface. »

Le Mémoire couronné fut celui de Cauchy : il se trouve au Tome I des *Mémoires des Savants étrangers de la nouvelle Académie des Sciences*, et au Tome I (série I) de ses *Œuvres complètes*. A la même époque, Poisson donnait, de son côté, une solution du même problème, dans deux Mémoires qu'il a réunis ensuite en un seul, intitulé : *Mémoire sur la Théorie des ondes*, et qui se trouve au Tome I des *Mémoires de la nouvelle Académie des Sciences*.

Nous analyserons rapidement ces importants Mémoires de Cauchy et de Poisson. Auparavant, introduisons quelques notations et conventions dont nous nous servirons par la suite. Nous prendrons toujours rectangulaires les axes de coordonnées, l'axe des z vertical et dirigé vers le bas, le plan des xy coïncidant avec la surface libre initiale du liquide. Lorsque le mouvement s'effectuera parallèlement à un plan (que nous prendrons pour plan des xz), de façon qu'aucune des fonctions du problème ne dépende de la coordonnée y , nous dirons qu'on est en présence d'un mouvement plan (dans lequel on fait abstraction de la

coordonnée y), ou encore qu'on est placé dans le cas de deux dimensions; le cas général où le mouvement s'effectuera dans tous les sens sera dit le cas de trois dimensions. Enfin, nous supposerons les unités choisies de telle façon que la densité du fluide et l'accélération g de la pesanteur soient égales à l'unité. Ajoutons que nous négligerons toujours les carrés et produits des déplacements et des vitesses, ce qui nous permettra, le cas échéant, de remplacer, dans certaines fonctions, des coordonnées un peu variables par des coordonnées fixes.

Analyse du Mémoire de Cauchy. — Cauchy divise son Mémoire en trois Parties. Dans la première Partie, il détermine l'état initial de tout le fluide en fonction de l'état initial de sa surface supposé donné. Il s'agit de déterminer une fonction *harmonique* définie dans tout le fluide, cette fonction étant assujettie à prendre des valeurs données à la surface $z = 0$, et devant s'annuler asymptotiquement à l'infini. Ce problème (problème de Dirichlet) est devenu classique, et la considération de potentiels conduit immédiatement aux formules que Cauchy obtient par une voie plus détournée.

Dans la seconde Partie, Cauchy, après avoir établi l'existence du potentiel des vitesses, donne les équations que ce potentiel vérifie à toute époque. Appelant q le potentiel des vitesses, et Q ce qu'il devient à la surface libre $z = 0$, ces équations sont :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0, \\ (2) \quad & \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad (\text{pour } z = 0), \\ (3) \quad & \frac{\partial^4 Q}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un mouvement plan, où l'on fait abstraction de la coordonnée y , les équations (1) et (3) se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned} (1)' \quad & \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0, \\ (3)' \quad & \frac{\partial^4 Q}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Se plaçant d'abord dans le cas de deux dimensions, Cauchy donne

l'intégrale générale de ces deux équations simultanées (1)' et (3)' jointes à la condition (2).

L'intégrale générale de l'équation (1)' est

$$q = \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-mz} f(m, t) dm + \sum \int_0^\infty \cos mx e^{mz} f_1(m, t) dm,$$

f, f_1 désignant des fonctions arbitraires de la variable d'intégration m et du temps t ; chaque signe $\sum$ indiquant la somme de l'intégrale renfermée sous le signe $\int$, et de celle qu'on obtient en substituant $\sin mx$ à $\cos mx$ et changeant de fonction arbitraire (*Mémoire de Cauchy*, Note IX). La condition évidente que q ne devienne pas infini aux grandes profondeurs fait disparaître immédiatement le second terme de q et le réduit à

$$(4) \quad q = \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-mz} f(m, t) dm;$$

on a donc, pour la valeur de Q à la surface $z = 0$,

$$(4)' \quad Q = \sum \int_0^\infty \cos mx f(m, t) dm,$$

et pour la valeur de $\frac{\partial q}{\partial z}$ à cette même surface

$$(5) \quad \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{z=0} = - \sum \int_0^\infty \cos mx f(m, t) m dm.$$

D'autre part, l'équation (3)' a pour intégrale générale (*Mémoire de Cauchy*, Note X)

$$(6) \quad Q = \sum \int_0^\infty \cos mx e^{\sqrt{mt}} \zeta(m) dm + \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-\sqrt{mt}} \xi(m) dm \\ + \sum \int_0^\infty \cos mx \cos \sqrt{mt} \varphi(m) dm + \sum \int_0^\infty \cos mx \sin \sqrt{mt} \psi(m) dm,$$

$\zeta, \xi, \varphi, \psi$ étant quatre fonctions de m , dont chacune, à cause du signe $\sum$ (qui a le même sens que plus haut), représente deux fonc-

tions arbitraires. La condition que Q ne devienne point infini, pour t infini, entraîne $\zeta(m) = 0$, ce qui réduit Q à ses trois derniers termes; et l'on a

$$(7) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \sum \int_0^\infty \cos mx [e^{-\sqrt{m}t} \zeta(m) - \cos \sqrt{m}t \varphi(m) - \sin \sqrt{m}t \psi(m)] m dm.$$

Pour identifier les deux valeurs (4)' et (6) de Q , il suffira de poser

$$f(m, t) = e^{-\sqrt{m}t} \zeta(m) + \cos \sqrt{m}t \varphi(m) + \sin \sqrt{m}t \psi(m);$$

d'ailleurs, l'équation (2) sera vérifiée, vu les valeurs (5) et (7), si l'on pose

$$f(m, t) = -e^{-\sqrt{m}t} \zeta(m) + \cos \sqrt{m}t \varphi(m) + \sin \sqrt{m}t \psi(m);$$

comparant ces deux expressions de $f(m, t)$, il vient

$$\zeta(m) = 0,$$

$$f(m, t) = \cos \sqrt{m}t \varphi(m) + \sin \sqrt{m}t \psi(m).$$

Alors les équations (4) et (4)' deviennent respectivement

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-mz} \cos \sqrt{m}t \varphi(m) dm \\ \quad + \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-mz} \sin \sqrt{m}t \psi(m) dm, \\ Q = \sum \int_0^\infty \cos mx \cos \sqrt{m}t \varphi(m) dm \\ \quad + \sum \int_0^\infty \cos mx \sin \sqrt{m}t \psi(m) dm. \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions arbitraires $\varphi(m)$ et $\psi(m)$, de façon à satisfaire aux conditions initiales, qui sont (en nous bornant aux ondes par émergence)

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{t=0, z=0} = F(x),$$

$$Q_{t=0} = 0,$$

$F(x)$ désignant une fonction connue qui représente la dénivellation initiale de la surface du fluide.

Si nous comparons ces deux dernières formules aux formules (8), il vient, pour déterminer les fonctions $\varphi(m)$ et $\psi(m)$,

$$(9) \quad \begin{cases} F(x) = \sum \int_0^\infty \cos mx \psi(m) \sqrt{m} dm, \\ 0 = \sum \int_0^\infty \cos mx \varphi(m) dm. \end{cases}$$

La seconde sera satisfaite en prenant $\varphi(m) = 0$; et en éliminant $\psi(m)$ entre la première (9) et la première (8) [cette élimination, qui revient à écrire $F(x)$ sous forme de l'intégrale double de Fourier, fait l'objet de la Note XI du *Mémoire de Cauchy*], on trouve

$$q = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \sin \sqrt{\mu} t \cos \mu (\varpi - x) e^{-\mu z} F(\varpi) d\varpi \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}},$$

qui est l'intégrale du problème.

Si l'on suppose que $F(\varpi)$ n'a de valeur sensible qu'entre des limites très resserrées, et pour de très petites valeurs de ϖ , et qu'on fasse, pour abréger,

$$G = \int_{-\infty}^\infty F(\varpi) d\varpi,$$

on réduira la formule précédente à

$$(10) \quad q = \frac{G}{\pi} \int_0^\infty \sin \sqrt{\mu} t \cos \mu x e^{-\mu z} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}.$$

Cette forme du potentiel des vitesses (pour les ondes par émergence) convient au cas du mouvement plan à deux dimensions. Dans le cas de trois dimensions, une analyse toute semblable conduit Cauchy au potentiel des vitesses suivant :

$$q = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \sin \sqrt{\mu\nu} t \sin \nu \cos \frac{[(\varpi - x)^2 + (\rho - y)^2] \mu}{4} \\ \times e^{-\sqrt{\mu\nu} z} F(\varpi, \rho) d\varpi d\rho \frac{d\mu d\nu}{\sqrt{\mu\nu}},$$

où $F(x, y)$ représente la dénivellation initiale de la surface libre. Si l'on suppose que cette dénivellation n'a de valeur sensible que pour

de très petites valeurs de ϖ et de ρ , et qu'on fasse, pour abréger,

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varpi, \rho) d\varpi d\rho,$$

on réduira la formule précédente à

$$(11) \quad q = \frac{G}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin \sqrt[4]{\mu\nu} t \sin \nu \cos \frac{(x^2 + y^2)\mu}{4} e^{-\sqrt{\mu\nu}z} \frac{d\mu d\nu}{\sqrt[4]{\mu\nu}}.$$

Ayant ainsi, dans les deux premières Parties de son Mémoire, obtenu l'intégrale du problème, Cauchy, dans une troisième Partie, déduit de ses formules les conséquences suivantes :

Au début, les vitesses sont nulles, mais elles atteignent rapidement des valeurs sensibles; la surface se couvre de petites ondes dont les sommets sont déterminés par les points dont l'élévation ou l'abaissement est maximum;

Le mouvement s'évanouit aux grandes profondeurs;

Les vitesses sont indépendantes de la densité;

La vitesse de chaque onde est indépendante de la forme et du volume du liquide soulevé ou déprimé à l'origine du mouvement; elle est proportionnelle au temps;

Les hauteurs des ondes décroissent comme l'inverse du carré du temps (dans le cas de deux dimensions) et comme l'inverse de sa quatrième puissance (dans le cas de trois dimensions);

La hauteur de chaque onde est proportionnelle au volume du liquide soulevé ou déprimé, à l'origine du mouvement.

Analyse du Mémoire de Poisson. — Au début de son Mémoire, Poisson rappelle les équations indéfinies du problème :

$$(1) \quad p - z + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

renvoyant, pour l'établissement de ces équations, à son *Traité de Mécanique* (t. II, p. 493); φ désigne le potentiel des vitesses et p

la pression. Poisson fait, bien entendu, les mêmes hypothèses que Cauchy, relativement à la petitesse des déplacements et des vitesses : il en néglige les carrés et produits.

Il joint à ces équations la condition à la surface

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } z = 0),$$

et, supposant la profondeur h finie, mais constante, la condition au fond

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (\text{pour } z = h).$$

Ayant ainsi formé les équations (2), (3) et (4), que vérifie la fonction φ à toute époque, Poisson, se plaçant d'abord dans le cas de deux dimensions ($\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$), cherche à satisfaire simultanément à ces équations « de la manière la plus générale », ce qui le conduit à l'expression suivante de φ :

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi = & \sum B (e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}) \cos(ax + a') \sin ct \\ & + \sum B' (e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}) \cos(ax + a') \cos ct, \end{aligned}$$

dans laquelle les sommes $\sum$ s'étendent à toutes les valeurs possibles des constantes B , B' , a et a' ; quant à la constante c , elle est définie par

$$c^2 = a \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}}.$$

Il ne reste plus qu'à introduire dans l'expression (5) les conditions initiales, qui sont les suivantes (en nous bornant aux ondes par émergence) : pour $t = 0$ et $z = 0$, on doit avoir

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. Ces conditions s'écrivent, d'a-

près (5),

$$\begin{aligned}\sum B' (e^{ah} + e^{-ah}) \cos(ax + a') &= 0, \\ \sum B e^{(e^{ah} + e^{-ah})} \cos(ax + a') &= f(x).\end{aligned}$$

La première sera satisfaite si l'on prend $B' = 0$; quant à la seconde, en mettant $f(x)$ sous la forme de l'intégrale de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} f(\alpha) \cos(ax - a\alpha) da d\alpha,$$

on voit qu'elle sera satisfaite en prenant

$$\begin{aligned}a' &= -a\alpha, \\ B &= \frac{1}{\pi c} \frac{f(\alpha) da d\alpha}{e^{ah} + e^{-ah}};\end{aligned}$$

ce qui met la fonction φ , donnée par (5), sous la forme

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} f(\alpha) \left(\frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \right) \cos(ax - a\alpha) \frac{\sin ct}{c} da d\alpha.$$

Tel est le potentiel des vitesses de Poisson, dans le cas de deux dimensions, et d'une profondeur quelconque h .

Supposant d'abord h très petit, Poisson retrouve les résultats de Lagrange; puis, passant au cas d'une profondeur très grande, il trouve, en faisant $h = \infty$ dans la formule précédente,

$$(6) \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} f(\alpha) e^{-a\alpha} \cos(ax - a\alpha) \frac{\sin \sqrt{a} t}{\sqrt{a}} da d\alpha;$$

en supposant que $f(\alpha)$ n'a de valeur sensible que pour de très petites valeurs de α , et posant pour abrégé

$$\int_{\infty} f(\alpha) d\alpha = A,$$

cette expression de φ se réduit à

$$\varphi = \frac{A}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a\alpha} \cos a\alpha \frac{\sin \sqrt{a} t}{\sqrt{a}} da,$$

identique (aux notations près) au potentiel des vitesses de Cauchy [formule (10), p. 6]; d'ailleurs les méthodes mêmes suivies par les deux géomètres ne diffèrent guère que par la forme.

On peut remarquer, avec Poisson, que cette valeur de φ satisfait à l'équation (3), non seulement pour $z = 0$, mais pour toute valeur de z , ce qui prouve que cette équation (3) est une équation *indéfinie* du problème.

Ayant ainsi intégré les équations du problème, Poisson passe aux conséquences de la formule (6); il étudie les premières, puis les dernières vitesses des particules fluides; dans ce but il se sert de développements en série, qu'il obtient par des procédés compliqués et parfois peu rigoureux. A cette occasion, nous signalerons quelques Notes sur ce sujet, publiées par Plana au Tome XXV des *Mémoires de l'Académie de Turin*, où ce géomètre simplifie un peu quelques-unes des transformations de Poisson, sans d'ailleurs changer en rien la ligne générale de son analyse.

En confondant le corps immergé avec sa parabole osculatrice au point le plus bas, Poisson étudie le mouvement des ondes à la surface, et à une grande distance du centre d'ébranlement. Il arrive, bien entendu, aux mêmes conclusions générales que Cauchy, à savoir que le mouvement de propagation des ondes est uniformément accéléré, que leurs vitesses sont indépendantes de la forme et du volume du liquide soulevé ou déprimé, etc.

Ensuite, il étudie les oscillations du liquide sur la verticale du centre d'ébranlement, et trouve que, là encore, les vitesses se propagent d'un mouvement uniformément accéléré.

Les résultats précédents sont relatifs au cas de deux dimensions. Poisson, appliquant la même analyse au cas de trois dimensions, trouve pour potentiel des vitesses, dans le cas des ondes d'émersion, et d'une profondeur infinie

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(\alpha, \beta) e^{-\sqrt{a^2 + b^2} z} \\ & \times \cos(ax - a\alpha) \cos(b\gamma - b\beta) \frac{\sin \sqrt[4]{a^2 + b^2} t}{\sqrt[4]{a^2 + b^2}} da db d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

En supposant que $f(\alpha, \beta)$ n'a de valeur sensible que pour de très

petites valeurs de α et β , et posant pour abrégier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = A,$$

cette expression du potentiel φ se réduit à

$$\varphi = \frac{A}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{a^2+b^2}z} \cos ax \cos by \frac{\sin \sqrt[3]{a^2+b^2}t}{\sqrt[3]{a^2+b^2}} da db.$$

Elle n'est pas identique à la forme donnée par Cauchy [formule (11), p. 7], mais s'y ramène par une transformation indiquée par Cauchy lui-même (Note XI de son Mémoire).

De cette valeur du potentiel, Poisson tire les mêmes conclusions que dans le cas de deux dimensions, relativement à la propagation du mouvement à la surface et sur la verticale du centre d'ébranlement. Au sujet du mouvement à la surface, il compare les résultats de sa théorie avec quelques expériences faites antérieurement par Biot; la différence entre les temps observés et les temps calculés, pour le passage de la première onde à une certaine distance du centre d'émersion, s'élève en moyenne à 1 seconde pour ces expériences (les temps eux-mêmes étant de l'ordre de 5 à 8 secondes); mais les temps observés par Biot ne sont évidemment qu'approximatifs (il ne donne pas les fractions de seconde), et ces expériences ne semblent pas très propres à servir d'épreuve à la théorie.

Des expériences bien plus précises, et très nombreuses, ont été faites en 1819 par Bidone, en vue de vérifier la théorie de Poisson; les résultats de Bidone se trouvent consignés dans la seconde Partie d'un Mémoire intitulé *Expériences sur le remous et la propagation des ondes*, publié dans les *Mémoires de l'Académie de Turin* (t. XXV, 1820). Ces expériences sont relatives à des ondes d'émersion, obtenues en immergeant très peu profondément, dans un canal en maçonnerie, des segments cylindriques en bois tourné, dont les génératrices sont normales à la longueur du canal, attendant que le liquide se mette au repos, puis soulevant très rapidement ces segments. Bidone observe le passage des deux premières ondes à diverses distances du centre d'ébranlement. Chaque expérience ayant été répétée plusieurs fois, il prend la moyenne des temps observés, qu'il compare au temps calculé.

La différence ne dépasse guère l'ordre du dixième de seconde, tant qu'on ne s'éloigne pas à plus de 30 pieds du lieu d'émersion; au delà de cette distance, l'accord est moins satisfaisant, ce qui est dû, dit Bidone, « soit à l'influence de quelque élément dont on a fait abstraction dans la théorie (frottements, etc.), soit à l'influence de termes qu'on a négligés dans le calcul »; peut-être aussi y a-t-il lieu de remarquer que la profondeur du canal de Bidone (24 pouces) n'était pas infinie. L'expérience suivante lui a permis de prouver que le mouvement se propage à une profondeur sensible; le canal communique à une de ses extrémités avec un grand récipient, mais une vanne permet de fermer cette communication sur toute sa hauteur, sauf au fond où elle laisse subsister une ouverture de quelques centimètres, si bien que le canal et le récipient communiquent à la façon de deux vases communicants; si l'on vient à produire des ondes à la surface du canal, près de son extrémité, on voit aussi s'agiter la surface libre du liquide du récipient: cette transmission du mouvement n'a pu se faire que par le fond. Enfin Bidone rapporte deux expériences relatives au cas de trois dimensions (fluide indéfini), et il constate encore un accord remarquable avec la théorie.

La question de la théorie des ondes liquides par émersion et par impulsion, dans le cas d'un fluide indéfini, a été reprise plus récemment par M. Boussinesq, par une méthode entièrement différente de celles de Cauchy et Poisson, et beaucoup plus simple, et qui, par conséquent, permet l'étude du phénomène avec plus de détails; par exemple, il a pu étudier le mouvement au voisinage du centre d'ébranlement, ce qui ne paraît pas possible avec les méthodes de Cauchy et de Poisson. Comme nous nous servirons, dans la suite, de la méthode même de M. Boussinesq, nous n'insisterons pas ici sur ses résultats, qui ont été publiés dans un Ouvrage intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse*, et partiellement dans son *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, fasc. II (Gauthier-Villars).

Dans sa Thèse de doctorat, soutenue le 12 mars 1908 devant la Faculté des Sciences de Paris, M. Rousier a étudié complètement le

cas de deux dimensions; après avoir déterminé la dénivellation initiale dans toute la masse du fluide, il étudie le mouvement sur une droite d'inclinaison quelconque partant du centre d'ébranlement. Partant du potentiel des vitesses sous la forme de M. Boussinesq, il arrive, en intégrant le long d'un certain contour dans le plan de la variable complexe, à le développer en série suivant les puissances de $\frac{t^2}{2r}$ (r désignant la distance au centre d'ébranlement, et t le temps); la forme même du développement prouve immédiatement que la propagation du mouvement est uniformément accélérée dans toute direction.

Dans la première Partie de ce travail, je me propose d'étudier les ondes d'émergence ou d'impulsion, produites dans un fluide indéfini, dans le cas de deux et de trois dimensions; après avoir reproduit de la Thèse de M. Rousier ce qui sera indispensable, j'identifierai, dans les deux cas, le potentiel des vitesses obtenu par M. Boussinesq avec celui de Poisson. J'aurai aussi l'occasion de retrouver, par une autre méthode, les résultats de M. Rousier, et de les étendre au cas de trois dimensions.

Dans une seconde Partie, j'essaierai d'étudier les oscillations d'un liquide pesant, dans un vase de forme quelconque, et de faire l'application des formules à quelques cas particuliers.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES ONDES LIQUIDES DANS LE CAS D'UN FLUIDE INDÉFINI.

I. — Équations du problème.

Supposons un liquide incompressible contenu dans un vase à parois fixes; ce liquide étant primitivement au repos, nous le mettons en mouvement par une cause agissant sur une partie de sa surface libre, et pendant un temps très court; dans ces conditions on sait que le phénomène dépend d'un potentiel des vitesses. Nous prendrons trois axes de coordonnées rectangulaires; le plan xOy étant confondu avec le plan de la surface libre au repos, l'axe Oz vertical et dirigé vers le bas; nous désignerons par φ le potentiel des vitesses, et par u, v, w , les composantes de la vitesse d'une particule. On a dans ces conditions

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Le fluide étant incompressible, l'équation de conservation des volumes (équation de continuité) donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Nous désignons le premier membre de cette équation par $\Delta_2 \varphi$. Nous avons là une équation *indéfinie* du problème, que vérifie la fonction inconnue φ en tous les points du fluide et à toute époque.

Les parois du vase étant fixes, la dérivée du potentiel, prise suivant la normale, est nulle aux parois. D'ailleurs, les équations d'Euler conduisent à la relation

$$\frac{p}{\rho} = g z - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

qui est également vérifiée à toute époque en tous les points du fluide. Pour simplifier un peu les formules, nous choisissons les unités de façon à rendre égales à 1 la densité ρ et l'accélération g de la pesanteur. D'ailleurs, nous admettons qu'on peut négliger les carrés des vitesses. L'équation précédente devient alors

$$(a) \quad p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

L'action d'une pression constante s'exerçant en tous les points d'un fluide n'a aucune influence sur ses mouvements; nous pouvons donc faire abstraction de la pression atmosphérique et la regarder comme nulle; alors, pendant tout le mouvement libre, nous aurons à la surface l'équation

$$z - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Appelons

$$h = f(x, y, t)$$

la dénivellation de la surface libre à une époque t ; l'équation précédente s'écrit

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ y est prise pour des valeurs de z un peu variables, mais h étant toujours très petit, et φ continu, nous pouvons au second membre remplacer z par zéro.

A la surface libre, $z = h$; d'où l'on déduit, en suivant une même particule dans son mouvement,

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Nous avons déjà admis que les quantités u , v , h sont très petites; admettons qu'il en est de même pour les pentes $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ de la surface. Alors on a

$$w = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

D'autre part $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Or, nous avons déjà dit que, pour les points

de la surface, on peut, dans φ et ses dérivées, prendre $z = 0$. Égalant les deux valeurs de ω qu'on vient de trouver, et tenant compte de

$$h = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0},$$

on obtient l'équation de condition à la surface

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0}.$$

Pour achever de déterminer φ , nous avons les données d'état initial, différentes suivant qu'il s'agit d'ondes d'émersion ou d'ondes d'impulsion. Dans le premier cas, le mouvement sera dû à l'enlèvement brusque d'un solide : pendant le court instant (de $t = -\varepsilon$ à $t = 0$) que durera cet enlèvement, les ordonnées de la surface ne changeront pas d'une manière appréciable ; nulle hors de la région que touchait le solide, elles seront, dans cette région, égales à celles même de la surface qui limitait inférieurement ce corps, et l'on devra les supposer données en fonction de x et de y . De plus, la pression à la surface, qui, pour $t < -\varepsilon$, était égale à h d'après l'équation (a), variera de h à zéro durant le même temps ε ; la formule (a) montre donc que la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ comparable à h seulement, ne pourra, durant ce temps, faire prendre à la fonction φ , initialement nulle, que des valeurs de l'ordre de $h\varepsilon$, négligeables dans les calculs où paraîtront linéairement h et ses dérivées. Ainsi, les données *initiales* caractéristiques des ondes par émersion, exprimant l'état du fluide à la fin, $t = 0$, de la période préparatoire durant laquelle s'engendrent ces ondes, consisteront à poser

$$(\text{pour } t = 0) \quad \varphi_0 = 0 \quad \text{et} \quad h = f(x, y),$$

φ_0 désignant la valeur que prend φ à la surface libre, et $f(x, y)$ désignant les petites ordonnées primitives connues de la surface.

Dans le second cas (ondes par impulsion), le mouvement proviendra de pressions variables exercées à la surface libre, durant un instant très court, de $t = -\varepsilon$ à $t = 0$, et des considérations analogues montrent qu'on aura comme conditions initiales caractérisant les ondes par im-

pulsion

$$(\text{pour } t = 0) \quad \varphi_0 = F(x, y) \quad \text{et} \quad h = 0$$

$F(x, y)$ étant une fonction connue.

Le cas général où l'on se donnerait les conditions initiales

$$(\text{pour } t = 0) \quad \varphi_0 = F(x, y) \quad \text{et} \quad h = f(x, y),$$

résulte de la simple superposition par addition des deux cas précédents, puisque toutes les équations du problème sont linéaires.

M. Boussinesq a montré d'ailleurs (*Application des potentiels*, p. 648) que l'analyse du cas des ondes par impulsion se ramène à celle du cas des ondes par émergence. Il montre aussi (note de la page 581) que le problème ainsi posé est complètement déterminé, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une fonction φ satisfaisant aux conditions énoncées.

Nous allons étudier ici les ondes par émergence dans le cas où la profondeur du liquide, ainsi que ses dimensions horizontales, peuvent être regardées comme infiniment grandes. Dans cette hypothèse, la condition que la dérivée normale de φ s'annule à la paroi du vase est remplacée par la suivante : la fonction φ doit s'annuler asymptotiquement lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de l'origine des coordonnées. Pour t très grand, le mouvement s'éteint ; ce qui revient à dire que φ et ses dérivées s'annulent pour t infiniment grand ; cette dernière hypothèse n'est d'ailleurs qu'une déduction des conditions précédentes. En effet, le problème est déterminé sans elle, et, si c'était une condition nouvelle, elle rendrait le problème impossible. Or, le fait même que nous obtiendrons sa solution montre qu'il ne l'est pas.

Posons

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

cette expression est une fonction harmonique (puisque φ en est une) ; elle est nulle à la surface libre ; elle s'annule aussi pour tous les points très éloignés de l'origine, où φ tend partout vers zéro. Donc τ est nul en tous les points de la masse fluide, et l'équation

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0$$

devient une équation *indéfinie*. D'ailleurs, M. Boussinesq a montré (*Application des potentiels*, p. 587) que les deux équations

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0$$

sont équivalentes, eu égard aux relations spéciales qui les accompagnent.

Dans tout le fluide, on a

$$p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

dérivant par rapport à t , en suivant une même particule fluide, nous aurons, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \tau = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *Une particule fluide supporte la même pression pendant tout le mouvement.*

Désignons par Z l'ordonnée de la particule à l'état final de repos, nous aurons

$$p = Z;$$

comme, d'autre part, on a, à tout instant,

$$p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

on en déduit

$$z - Z = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

désignons par h cette *dénivellation* $z - Z$ de la particule à l'époque t ; l'égalité précédente montre qu'on a, dans toute la masse fluide et à tout instant, $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Nous avons déjà trouvé cette égalité pour la surface libre.

Nous avons vu que, dans toute la masse fluide, on a l'équation indéfinie

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0,$$

qui s'écrit, en remplaçant τ par sa valeur,

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} - \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0;$$

et, en combinant cette dernière équation avec $\Delta_2 \varphi = 0$, il vient la nouvelle équation indéfinie

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Observons enfin que, à l'époque $t = 0$ où φ s'annule partout, et où il en est par suite de même de $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, la relation $\tau = 0$ se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0).$$

II. — Intégration des équations obtenues dans le cas où l'on fait abstraction d'une des dimensions horizontales du fluide.

Supposons le liquide dans un canal, et mis en mouvement par l'émersion d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à la longueur du canal. Le liquide étant primitivement au repos, et le cylindre très peu enfoncé, soit $z = f(x)$ l'équation de la section droite du cylindre immergé. Les équations du problème sont :

$$(1) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

$$(2) \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

avec les conditions

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} = f(x) \quad (\text{pour } t = 0),$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour } t, x \text{ ou } z \text{ très grands}).$$

Nous remarquerons que la première équation indéfinie ne contient pas de dérivée en z , et que la seconde ne contient pas de dérivée en t . Ceci nous conduit à chercher d'abord comment φ dépend de x et de t , sans nous préoccuper de z .

Occupons-nous donc d'abord de l'équation (1). En suivant la méthode de M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 593), prenons

$$\varphi = \int_0^\infty \left[\chi \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

α est la variable d'intégration; ψ et χ sont deux fonctions arbitraires, assujetties à donner à l'intégrale et à ses dérivées des valeurs finies et déterminées. Il faut choisir ces deux fonctions arbitraires de façon que φ vérifie l'équation (1). Calculons les dérivées de φ par rapport à t :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \left[\chi \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi' \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \frac{t}{\alpha^2} d\alpha;$$

posons

$$\beta = \frac{t}{\alpha},$$

d'où

$$d\beta = -\frac{t}{\alpha^2} d\alpha;$$

il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \left[\chi \left(x + \frac{t^2}{2\beta^2} \right) + \chi \left(x - \frac{t^2}{2\beta^2} \right) \right] \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Calculons de même $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ et revenons aux anciennes notations; il viendra

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int_0^\infty \left[\chi' \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \chi' \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi' \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}$ se déduira de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, comme cette dernière de φ ; d'où

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = \int_0^\infty \left[\chi'' \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi'' \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha.$$

D'ailleurs, on a immédiatement

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2} = \int_0^\infty \left[\chi'' \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha.$$

L'équation (1) devient donc

$$(3) \quad \int_0^\infty \left[\chi'' \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \left[\psi'' \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) + \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \right] d\alpha = 0.$$

Nous allons choisir ψ de façon que la quantité sous le signe *somme* soit une différentielle exacte; pour cela, posant

$$\frac{t^2}{2\alpha^2} = \gamma,$$

nous prendrons

$$(4) \quad \psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\gamma}.$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{1}{t\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[\chi''\left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right) + \chi''\left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right) \right] d\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = 0;$$

le premier membre s'intègre immédiatement, et cette équation s'écrit

$$\left[\chi'\left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \chi'\left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right) \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} = 0.$$

Pour $\alpha = 0$, la quantité entre crochets est nulle; x étant fini il reste à vérifier

$$\chi'(+\infty) - \chi'(-\infty) = 0.$$

D'autre part, pour $x = \pm \infty$, φ doit être nul, ce qui conduit à prendre

$$\chi(\pm \infty) = 0;$$

il est clair que cette condition entraîne la précédente. Ainsi la fonction χ devra s'annuler pour les valeurs infinies de la variable.

Revenons à l'équation (4) que doit vérifier $\psi(\gamma)$, avec les conditions

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0,$$

lesquelles entraîneront les conditions d'état initial

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0).$$

Cette fonction $\psi(\gamma)$ a été étudiée par M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 594 et 604; *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, fasc. II, p. 266). Nous nous bornons à mentionner les résultats; on a

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2) d\mu;$$

pour les très grandes valeurs de γ , cette fonction se réduit sensiblement à

$$\psi(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right).$$

Signalons encore le développement en série de $\psi(\gamma)$

$$\psi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(\sqrt{2}\gamma)^3}{1.3} - \frac{(\sqrt{2}\gamma)^7}{1.3.5.7} + \dots \pm \frac{(\sqrt{2}\gamma)^{4n+3}}{1.3.5\dots(4n+3)} \mp \dots \right];$$

et rappelons enfin la valeur de l'intégrale définie suivante :

$$(5) \quad \int_0^\infty \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

La fonction $\psi(\gamma)$ étant ainsi déterminée, revenons à la fonction χ . Rappelons-nous qu'on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x) \quad (\text{pour } t=0 \text{ et } z=0);$$

or, nous avons déjà calculé l'expression de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$; en nous y reportant, nous trouvons qu'on doit avoir

$$f(x) = 2\chi(x) \int_0^\infty \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta \quad (\text{pour } t=0 \text{ et } z=0),$$

ce qui donne, d'après (5),

$$\chi(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x) \quad (\text{pour } z=0);$$

la fonction χ est donc complètement déterminée en fonction de x , quand on y fait $z=0$.

En réalité la fonction χ dépend aussi de z , que nous avons traité jusqu'ici comme une constante. Voyons comment y entrera cette variable.

Considérons la fonction

$$\varphi = \int_0^\infty \left[\chi \left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z \right) + \chi \left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z \right) \right] \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

en tant que fonction de x et de z , cette fonction φ doit être harmonique; elle le sera si l'on a

$$\Delta_2 \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0;$$

d'ailleurs φ s'annulera pour x ou z infinis, s'il en est de même de χ . La fonction $\chi(x, z)$ devant être harmonique, s'annuler à l'infini, et prendre à la surface $z = 0$ des valeurs données, nous sommes conduit à la représenter par le potentiel d'une double couche de densité $\rho(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} f(x)$, étalée sur l'axe des x . Nous prendrons donc

$$(6) \quad \chi(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f(\xi)}{z^2 + (x - \xi)^2} d\xi,$$

ce qui nous donne finalement, pour valeur du potentiel des vitesses φ ,

$$(7) \quad \left\{ \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f(\xi)}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2} - \xi\right)^2} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f(\xi)}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2} - \xi\right)^2} d\xi \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha. \right.$$

Telle est la solution de M. Boussinesq; la fonction φ ainsi déterminée vérifie bien toutes les conditions du problème; en particulier, cette fonction est bien déterminée et admet des dérivées partielles qu'on peut calculer comme nous l'avons fait; on trouvera la démonstration de ces points dans les Ouvrages déjà cités de M. Boussinesq.

III. — Identification du potentiel des vitesses de M. Boussinesq et de celui de Poisson et Cauchy. Développements en série.

Je me propose de transformer la formule (7) de façon à l'identifier avec l'intégrale donnée par Poisson dans son *Mémoire sur la théorie des ondes*, et à retrouver le développement en série de la dénivellation qui a permis à M. Rousier d'étudier le mouvement sur une droite d'inclinaison quelconque partant du centre d'ébranlement.

Récrivons la formule de M. Boussinesq :

$$\varphi = \int_0^\infty \left[\chi \left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z \right) + \chi \left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z \right) \right] \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

et, au lieu de prendre pour χ la forme (6), nous prendrons

$$(8) \quad \chi(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{m=0}^{m=\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi) e^{-zm} \cos m(x - \xi) dm d\xi;$$

ces deux formes de χ sont bien équivalentes, puisqu'on a l'identité bien connue

$$\int_0^\infty e^{-zm} \cos m(x - \xi) dm = \frac{z}{z^2 + (x - \xi)^2}.$$

Supposons dès maintenant que le corps primitivement immergé se réduise à un seul élément dq immergé à l'origine des coordonnées (ce qui correspondra à une *solution simple naturelle*); cette hypothèse ne réduit pas la généralité et simplifiera quelque peu nos écritures. Alors dans l'expression (8) de χ nous devons remplacer $\cos m(x - \xi)$ par $\cos mx$ et $\int f(\xi) d\xi$ par dq ; ce qui réduira χ à

$$\chi(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} dq \int_0^\infty e^{-zm} \cos mx dm;$$

dans tout ce qui suit nous supposerons $z \neq 0$, pour être assuré que les intégrales aient un sens bien déterminé; d'ailleurs nos formules finales s'appliqueront aussi pour $z = 0$.

Si nous remplaçons, dans l'expression de φ , la fonction χ par cette dernière valeur, nous trouvons pour le potentiel des vitesses correspondant à une solution simple naturelle

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} dq \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha \\ &\quad \times \int_{m=0}^{m=\infty} e^{-zm} \left[\cos m \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \cos m \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] dm; \end{aligned}$$

remplaçons $\cos m \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \cos m \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right)$ par $2 \cos mx \cos m \frac{\alpha^2}{2}$

qui lui est égal; il vient

$$\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{m=0}^{m=\infty} e^{-zx} \cos mx \, dm \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

que j'écris

$$(9) \quad \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-zx} \cos mx \, \mathfrak{F}(m, t) \, dm,$$

en posant

$$\mathfrak{F}(m, t) = \int_0^\infty \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

Il s'agit d'étudier cette fonction $\mathfrak{F}(m, t)$. Or je remarque que cette intégrale définie est de la forme

$$\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

étudiée à la Leçon XXXIII du *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. Boussinesq (t. II, fasc. 2, p. 179); M. Boussinesq a montré comment on peut calculer très simplement les dérivées en t d'une pareille intégrale définie, et c'est d'ailleurs sa méthode que nous avons suivie plus haut pour calculer les dérivées en t de la fonction φ elle-même.

On a

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}(m, t) = \int_0^\infty \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \int_0^\infty \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} = \int_0^\infty -m \sin \frac{m\alpha^2}{2} \psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha. \end{cases}$$

Comparons maintenant $\mathfrak{F}$ et $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2}$: je dis qu'on a

$$\mathfrak{F} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} = 0.$$

Il suffit, pour l'établir, de vérifier la formule

$$(11) \quad \int_0^\infty \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha = \int_0^\infty \sin \frac{m\alpha^2}{2} \psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha;$$

or, rappelons-nous l'expression de la fonction ψ :

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2) d\mu,$$

d'où

$$\psi'(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos(\gamma - \mu^2) d\mu.$$

Alors, si nous posons

$$\frac{\ell^2}{2\alpha^2} = \nu^2, \quad \text{d'où} \quad d\alpha = -\frac{t}{\sqrt{2}} \frac{d\nu}{\nu^2},$$

la formule (11) à vérifier s'écrit

$$\int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \cos \frac{mt^2}{4\nu^2} \frac{d\nu}{\nu^2} \int_{\mu=0}^{\mu=\nu} \sin(\nu^2 - \mu^2) d\mu = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sin \frac{mt^2}{4\nu^2} \frac{d\nu}{\nu^2} \int_{\mu=0}^{\mu=\nu} \cos(\mu^2 - \nu^2) d\mu.$$

Or, pour que cette dernière égalité soit établie, il suffit de vérifier qu'on a la suivante (où l'on a introduit dans chaque membre un facteur exponentiel à exposant négatif destiné à rendre les intégrales absolument convergentes) :

$$\begin{aligned} & \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \cos \frac{mt^2}{4\nu^2} \frac{d\nu}{\nu^2} \int_{\mu=0}^{\mu=\nu} e^{-k(\nu^2 - \mu^2)} \sin(\nu^2 - \mu^2) d\mu \\ &= \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} e^{-k \frac{mt^2}{4\nu^2}} \sin \frac{mt^2}{4\nu^2} \frac{d\nu}{\nu^2} \int_{\mu=0}^{\mu=\nu} \cos(\mu^2 - \nu^2) d\mu; \end{aligned}$$

cette dernière égalité sera facile à établir pour les valeurs *positives* du paramètre k ; elle sera vraie par conséquent aussi pour $k = 0$, puisque les deux membres étant des intégrales uniformément convergentes pour k positif ou nul, sont des fonctions continues de k lorsque k tend vers 0 par valeurs positives. Supposant donc $k > 0$, nous allons effectuer un changement de variables (*voir*, à ce sujet, la Thèse de M. Roussier, p. 27). Considérons ν et μ comme les coordonnées d'un point P du plan (*fig. 1*); le champ d'intégration est l'angle ν OA égal à $\frac{\pi}{4}$. Passant aux coordonnées polaires, nous posons

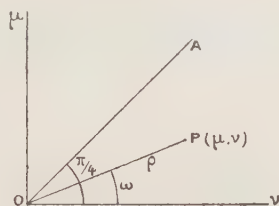
$$\nu = \rho \cos \omega, \quad \mu = \rho \sin \omega.$$

Avec ces nouvelles variables ρ et ω , l'identité à vérifier s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^\infty \cos\left(\frac{mt^2}{4\rho^2 \cos^2 \omega}\right) e^{-k\rho^2 \cos 2\omega} \sin(\rho^2 \cos 2\omega) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 \cos^2 \omega} \\ &= \int_0^\pi d\omega \int_0^\infty e^{-k\frac{mt^2}{4\rho^2 \cos^2 \omega}} \sin\left(\frac{mt^2}{4\rho^2 \cos^2 \omega}\right) \cos(\rho^2 \cos 2\omega) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 \cos^2 \omega} \end{aligned}$$

(c'est pour que ce changement de variables soit légitime qu'il a fallu rendre les intégrales absolument convergentes au moyen d'un facteur

Fig. 1.



exponentiel); or je dis que dans les deux membres de cette dernière égalité, les intégrales relatives à ρ sont égales, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos\left(\frac{mt^2}{4\rho^2 \cos^2 \omega}\right) e^{-k\rho^2 \cos 2\omega} \sin(\rho^2 \cos 2\omega) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 \cos^2 \omega} \\ &= \int_0^\infty e^{-k\frac{mt^2}{4\rho^2 \cos^2 \omega}} \sin\left(\frac{mt^2}{4\rho^2 \cos^2 \omega}\right) \cos(\rho^2 \cos 2\omega) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 \cos^2 \omega}, \end{aligned}$$

ou, avec des notations plus simples,

$$(12) \quad \int_0^\infty e^{-kB\rho^2} \cos\left(\frac{A}{\rho^2}\right) \sin(B\rho^2) \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^\infty e^{-k\frac{A}{\rho^2}} \sin\left(\frac{A}{\rho^2}\right) \cos(B\rho^2) \frac{d\rho}{\rho},$$

A et B désignant des constantes positives indépendantes de la variable d'intégration ρ ; or cette identité se vérifie immédiatement. En effet, si l'on fait le changement de variable

$$\frac{\sqrt{A}}{\rho} = \sqrt{B} \rho_1, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\rho_1}{\rho_1},$$

le second membre se transforme en

$$-\int_{\infty}^0 e^{-\lambda B \rho_1^2} \sin(B \rho_1^2) \cos\left(\frac{A}{\rho_1^2}\right) \frac{d\rho_1}{\rho_1},$$

qui est manifestement identique au premier membre de (12).

L'identité (12) est donc vérifiée, et, par suite, aussi l'identité (11).
On a donc bien

$$\mathcal{F} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = 0;$$

d'où, intégrant,

$$\mathcal{F} = A \sin \sqrt{m} t + B \cos \sqrt{m} t,$$

A et B désignant deux constantes ne dépendant que de m . Mais, d'après les formules (10), $\mathcal{F}$ s'annule pour $t = 0$, puisque $\psi(0)$ est nul ; donc $B = 0$ et

$$\mathcal{F} = A \sin \sqrt{m} t,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)_{t=0} = A \sqrt{m};$$

mais, d'après les formules (10), on a aussi

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)_{t=0} = \int_0^{\infty} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}};$$

d'où nous tirons la valeur de A,

$$A = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\sqrt{m}},$$

et enfin

$$\mathcal{F}(m, t) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\sqrt{m}} \sin \sqrt{m} t.$$

Donc l'expression (9) du potentiel φ s'écrit

$$(13) \quad \varphi = \frac{dq}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-zx} \cos mx \frac{\sin \sqrt{m} t}{\sqrt{m}} dm,$$

identique aux potentiels donnés par Poisson et par Cauchy, dont nous avons rappelé les formules dans l'Historique [cf. *Mémoire de Poisson*,

p. 92, formule (10); *Mémoire de Cauchy*, seconde Partie, formule (62)].

Nous pouvons maintenant obtenir facilement le développement de φ en série; on a

$$\sin \sqrt{m} t = \sqrt{m} t - \frac{(\sqrt{m} t)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{m} t)^5}{5!} - \dots \pm \frac{(\sqrt{m} t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \mp \dots;$$

portant cette valeur dans l'expression (13) de φ , il vient

$$\varphi = \frac{dq}{\pi} \int_0^\infty e^{-zm} \cos mx \, dm \left[t - m \frac{t^3}{3!} + m^2 \frac{t^5}{5!} - \dots \pm \frac{m^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \mp \dots \right].$$

Or, la série entre crochets est uniformément convergente pour m compris entre zéro et un nombre arbitrairement grand; on peut donc intégrer terme à terme et écrire

$$\varphi = \frac{t dq}{\pi} \left[\int_0^\infty e^{-zm} \cos mx \, dm - \frac{t^2}{3!} \int_0^\infty m e^{-zm} \cos mx \, dm + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \int_0^\infty m^k e^{-zm} \cos mx \, dm \mp \dots \right].$$

Si nous posons

$$Z = \int_0^\infty e^{-zm} \cos mx \, dm = \frac{z}{z^2 + x^2},$$

on aura

$$\frac{\partial^k Z}{\partial z^k} = (-1)^k \int_0^\infty m^k e^{-zm} \cos mx \, dm,$$

et cette intégrale (convergente si z n'est pas nul) est précisément le coefficient de $\frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$ dans la parenthèse. Or si l'on prend, dans le plan des xz , des coordonnées polaires (*fig. 2*), en posant

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta,$$

il est bien connu qu'on a

$$\frac{\partial^k Z}{\partial z^k} = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) = (-1)^k k! \frac{\cos(k+1)\theta}{r^{k+1}}$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \frac{t}{\pi} \frac{dq}{r} \left[\frac{\cos \theta}{r} - \frac{t^2}{3!} \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{t^4}{5!} \frac{2! \cos 3\theta}{r^3} - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \frac{k! \cos(k+1)\theta}{r^{k+1}} \mp \dots \right].$$

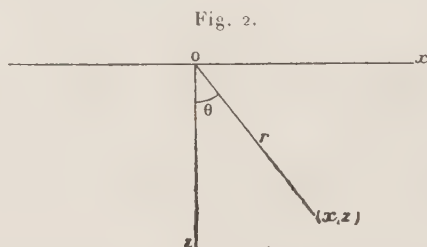
Nous obtenons donc finalement pour la dénivellation $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$:

$$h = \frac{dq}{\pi r} \left[\cos \theta - \frac{1}{2!} \frac{t^2}{r} \cos 2\theta + \frac{2!}{4!} \frac{t^4}{r^2} \cos 3\theta - \dots \pm \frac{k!}{(2k)!} \frac{t^{2k}}{r^k} \cos(k+1)\theta \mp \dots \right],$$

ou bien, posant $\frac{t^2}{2r} = \frac{1}{\gamma}$,

$$(14) \quad h = \frac{dq}{\pi r} \left[\cos \theta - \frac{1}{\gamma} \cos 2\theta + \frac{1}{1.3} \frac{1}{\gamma^2} \cos 3\theta - \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^k}{1.3.5 \dots (2k-1)} \frac{1}{\gamma^k} \cos(k+1)\theta + \dots \right],$$

formule identique à celle de M. Rousier [*Thèse*, p. 40, form. (15 bis)].



Cette formule n'a été établie, il est vrai, qu'en supposant $z \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \frac{\pi}{2}$; mais la série du second membre étant uniformément convergente quel que soit θ , représente une fonction continue de θ , même pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; on a donc le droit de faire $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans cette formule, ce qui donne, pour la dénivellation à la surface,

$$h = \frac{dq}{\pi r} \left[\frac{\frac{t^2}{2r}}{1} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^3}{1.3.5} + \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^5}{1.3.5.7.9} - \dots \right];$$

c'est la formule obtenue par Cauchy, Poisson et M. Boussinesq (*Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, fasc. 2, p. 504).

On peut aussi, avec M. Rousier, déduire de la formule (14) le fait suivant : sur une droite d'inclinaison quelconque θ , partant de l'origine des coordonnées, la dénivellation h ne dépend (au facteur $\frac{1}{r}$ près) que de $\frac{1}{\gamma} = \frac{t^2}{2r}$; ce fait peut s'énoncer en disant que sur cette droite la propagation du mouvement est uniformément accélérée.

IV. — Étude des ondes par émergence dans le cas d'un bassin indéfini à trois dimensions.

Passons maintenant au cas où l'on restitue au fluide ses trois dimensions, le corps primitivement immergé étant de forme quelconque. Nous avons formé plus haut les équations qui définissent, dans ce cas, les ondes par émergence.

Ces équations sont les suivantes :

$$(15) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

avec les conditions

$$\left. \begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} = F(x, y) \quad (\text{pour } t = 0), \\ \left. \begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \\ (\text{pour } t, x, y \text{ ou } z \text{ très grands}), \end{aligned} \right\}$$

$F(x, y)$ désignant les petites ordonnées primitives connues de la surface.

Nous suivrons encore ici la méthode de M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 640; *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, fasc. 2, p. 505). Elle consiste à prendre

$$(17) \quad \varphi = \int_0^\infty \left[f\left(T + \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) + f\left(T - \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

en introduisant ainsi une nouvelle variable indépendante auxiliaire T (à laquelle nous attribuerons finalement la valeur constante zéro); la fonction ψ est la même que dans le cas de deux dimensions; et il nous reste à déterminer convenablement la fonction f .

Remarquons que, d'après sa forme même, l'expression (17) de φ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = 0,$$

[pourvu du moins qu'on ait

$$(17 \text{ bis}) \quad f_T(\infty, x, y, z) = f_T(-\infty, x, y, z)].$$

Par conséquent, l'équation (15) sera vérifiée si l'on a

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Donc, grâce à la variable en excès T , introduite dans (17), nous avons pu ramener l'intégration de l'équation du quatrième ordre (15) à celle de cette dernière (18), qui est du second ordre. D'ailleurs φ satisfera à cette équation (18) si chacun des éléments de l'intégrale (17) y satisfait, c'est-à-dire si la fonction $f(T, x, y, z)$ (où je désigne simplement par T la *première* variable) vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 f(T, x, y, z)}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 f(T, x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(T, x, y, z)}{\partial y^2};$$

or, cette équation (qui n'est autre que l'équation *du son* dans le cas de deux dimensions) peut être intégrée, comme on sait, au moyen d'un potentiel sphérique, ou plutôt ici au moyen de la dérivée $\frac{\partial}{\partial T}$ d'un pareil potentiel (*voir*, au sujet de cette intégration, le *Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, t. II, fasc. 2, p. 443 et p. 507); on prendra donc

$$(19) \quad f(T, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\pi T \cos \mu \, d\mu \int_0^{2\pi} \chi(x + T \cos \mu \cos \theta, y + T \cos \mu \sin \theta, z) \, d\theta$$

où la fonction χ , qui représente la densité de la matière potentialante, reste encore arbitraire. Nous avons pris la dérivée $\frac{\partial}{\partial T}$ du potentiel

sphérique, et non pas ce potentiel lui-même, parce que ce potentiel est une fonction *impaire* de T ; or, nous devons finalement poser, dans (17), $T = 0$, ce qui réduira le binôme entre crochets à

$$f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) + f\left(-\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right),$$

fonction essentiellement *paire* de la première variable $\frac{\alpha^2}{2}$, et dans laquelle une partie de f impaire par rapport à cette variable s'entre-détruirait identiquement.

La formule (19) donnant pour f une fonction paire de sa première variable, on a

$$f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) = f\left(-\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right),$$

et, par suite, la formule (17) (où l'on fait $T = 0$) donne pour φ

$$(20) \quad \varphi = 2 \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

avec l'expression (19) de la fonction f , quant à sa première variable.

Il ne reste plus qu'à déterminer la fonction χ qui entre dans (19). Or, nous n'avons pas encore utilisé l'équation indéfinie (16) à laquelle doit satisfaire φ ; cette équation sera satisfaite si chacun des éléments de l'intégrale (20) satisfait lui-même à l'équation de Laplace, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0;$$

or, d'après (19), cette dernière sera vérifiée si l'on a

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0;$$

nous sommes donc conduit à prendre pour $\chi(x, y, z)$ une fonction harmonique.

D'ailleurs, la formule (20), différenciée en t , nous donne

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} f(0, x, y, z).$$

Mais, d'après les propriétés connues des potentiels sphériques (*Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, t. II, fasc. 2, p. 444), la formule (19) nous donne aussi

$$f(0, x, y, z) = \chi(x, y, z);$$

donc

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \chi(x, y, z).$$

Ceci achève de déterminer notre fonction χ ; en effet, nous savons que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$ doit s'annuler pour x, y , ou z infinis, et doit prendre, pour $z = 0$, les valeurs données $F(x, y)$.

Donc la fonction $\chi(x, y, z)$ est la fonction harmonique définie dans tout l'espace au-dessous du plan des xy , s'annulant à l'infini, et prenant pour $z = 0$ les valeurs

$$\chi(x, y, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x, y).$$

La considération des potentiels de double couche conduit immédiatement à prendre pour χ l'expression suivante :

$$(21) \quad \chi(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{z F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer, dans (19), χ par cette valeur, puis à porter dans (20) la valeur (19) de f pour obtenir l'expression du potentiel des vitesses φ . La fonction ainsi obtenue vérifie bien toutes les conditions du problème; en particulier, on peut s'assurer que la formule (17 *bis*), reconnue indispensable, est bien vérifiée. Telle est, dans ses traits principaux, l'analyse de M. Boussinesq; pour plus de détails, je renverrai aux Ouvrages de l'auteur.

V. — Identification du potentiel des vitesses de M. Boussinesq et de celui de Poisson. Développement en série.

Je me propose, comme je l'ai fait pour le cas de deux dimensions, d'identifier le potentiel de M. Boussinesq avec celui donné par Poisson

dans son *Mémoire sur la théorie des ondes*, et d'étendre, au cas de trois dimensions, les développements en série et les résultats de M. Rousier.

Récrivons la formule de M. Boussinesq

$$(22) \quad \varphi = 2 \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

dans laquelle la fonction de quatre variables $f(T, x, y, z)$ a l'expression suivante :

$$(19) \quad f(T, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T \cos \mu d\mu \int_0^{2\pi} \chi(x + T \cos \mu \cos \theta, y + T \cos \mu \sin \theta, z) d\theta$$

et, au lieu de prendre pour χ la forme (21), nous prendrons la suivante :

$$(23) \quad \chi(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty dm dn \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(\xi, \eta) e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \cos m(x-\xi) \cos n(y-\eta) d\xi d\eta.$$

Ces deux formes de χ sont bien équivalentes, puisqu'on a l'identité

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \cos m(x-\xi) \cos n(y-\eta) dm dn = \frac{\pi}{2} \frac{z}{[z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

[voir *Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, t. II, fasc. 2, p. 530-531; en comparant les formules (126) et (129), et différentiant cette dernière par rapport à z , on trouve l'identité précédente].

Supposons dès maintenant que le corps primitivement immergé se réduise à un seul élément dq immergé à l'origine des coordonnées (ce qui correspondra à une *solution simple naturelle*); cela revient, dans l'expression (23) de χ , à remplacer $\cos m(x-\xi)$, $\cos n(y-\eta)$ par $\cos mx$, $\cos ny$ et $\int \int F(\xi, \eta) d\xi d\eta$ par dq ; ce qui réduira χ à

$$(24) \quad \chi(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2} dq}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \cos mx \cos ny dm dn;$$

dans tout ce qui suit, nous supposerons $z \neq 0$ pour être assuré que les

intégrales aient un sens bien déterminé; d'ailleurs nos formules finales s'appliqueront aussi pour $z = 0$.

Explicitons maintenant la fonction f , c'est-à-dire portons dans (19) cette valeur (24) de χ ; il vient

$$\begin{aligned} f(T, x, y, z) &= \frac{\sqrt{2} dq}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} dm dn \\ &\times \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T \cos \mu d\mu \int_0^{2\pi} \cos m(x + T \cos \mu \cos \theta) \cos n(y + T \cos \mu \sin \theta) d\theta, \end{aligned}$$

que j'écris

$$(25) \quad f(T, x, y, z) = \frac{\sqrt{2} dq}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial T} dm dn,$$

en appelant $\Phi(T, x, y)$ le potentiel sphérique suivant (qui ne dépend pas de z) :

$$\begin{aligned} \Phi(T, x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} T \cos \mu d\mu \int_0^{2\pi} \cos m(x + T \cos \mu \cos \theta) \cos n(y + T \cos \mu \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Portant maintenant dans (22) la valeur (25) de f , il vient, pour φ , l'expression

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2} dq}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} dm dn \int_0^\infty \frac{\partial \Phi\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y\right)}{\partial\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)} \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

Nous appellerons, pour abréger, $\Phi', \Phi'', \dots$, les dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial T}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}, \dots$, de la fonction Φ par rapport à sa *première* variable T , et nous poserons

$$\mathcal{F}(m, n, t) = \int_0^\infty \Phi'\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha;$$

alors l'expression précédente de φ s'écrit

$$(26) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2} dq}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \mathcal{F}(m, n, t) dm dn.$$

Nous allons étudier cette fonction $\mathcal{F}(m, n, t)$ (qui dépend d'ailleurs aussi de x et y) et montrer qu'elle est égale à

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \cos mx \cos ny \frac{\sin \sqrt[4]{m^2 + n^2} t}{\sqrt[4]{m^2 + n^2}},$$

d'où résultera l'identité de la formule (26) avec celle de Poisson.

Pour rendre le raisonnement rigoureux, nous considérerons, au lieu du potentiel sphérique à *trois* variables $\Phi(T, x, y)$, le suivant Φ_1 , à *quatre* variables :

$$\begin{aligned} (26 \text{ bis}) \quad \Phi_1(T, x, y, z) = & \int_0^\pi T \cos \mu \, d\mu \int_0^{2\pi} \cos m(x + T \cos \mu \cos \theta) \\ & \times \cos n(y + T \cos \mu \sin \theta) e^{-\lambda(z + T \sin \mu)} d\theta; \end{aligned}$$

cette fois la densité ρ de la matière potentialante

$$\rho(x, y, z) = \cos mx \cos ny e^{-\lambda z}$$

dépend de l'ordonnée z . Les lettres m, n et λ doivent être regardées ici comme des constantes, et nous supposerons λ *positif*, de façon que l'exposant de e soit toujours négatif (z, T et $\sin \mu$ étant positifs). (Nous désignerons encore par $\Phi'_1, \Phi''_1, \dots$, les dérivées $\frac{\partial \Phi_1}{\partial T}, \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial T^2}, \dots$, de la fonction Φ_1 par rapport à sa première variable T .)

Si l'on fait tendre λ vers zéro, la fonction Φ_1 , fonction continue de λ pour la valeur $\lambda = 0$, tend évidemment vers Φ .

D'ailleurs, d'après une propriété connue des potentiels sphériques (*Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, t. II, fasc. 2, p. 197), on a

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial T^2} \quad \text{ou} \quad \Phi''_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2},$$

c'est-à-dire

$$(27) \quad \Phi''_1 = -(m^2 + n^2 - \lambda^2) \Phi_1.$$

Considérons alors la fonction suivante :

$$\mathcal{F}_1(m, n, \lambda, t) = \int_0^\infty \Phi'_1\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha;$$

c'est une fonction parfaitement déterminée et continue de λ , pour λ positif ou nul, et pour $\lambda = 0$ elle se réduit à la fonction que nous avons appelée $\mathcal{F}(m, n, t)$.

Or je remarque que cette fonction $\mathcal{F}$, est une intégrale définie de la forme

$$\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

dont la méthode de M. Boussinesq permet de calculer les dérivées en t .

On a

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_1 = \int_0^\infty \Phi_1\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \\ \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = \int_0^\infty \Phi_1\left(\frac{t^2}{2\beta^2}\right) \psi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial t^2} = \int_0^\infty \Phi_1''\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \\ \frac{\partial^4 \mathcal{F}_1}{\partial t^4} = \int_0^\infty \Phi_1'''\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi''\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha. \end{array} \right.$$

Il semble difficile ici de démontrer l'égalité (à un facteur près) de $\mathcal{F}_1$ et de $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial t^2}$; mais comparons $\mathcal{F}_1$ et $\frac{\partial^4 \mathcal{F}_1}{\partial t^4}$.

Remarquons tout d'abord que l'égalité (27) différenciée en T donne

$$\Phi_1''' = -(m^2 + n^2 - \lambda^2) \Phi_1',$$

et que, par conséquent, on peut écrire

$$\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial t^4} = -(m^2 + n^2 - \lambda^2) \int_0^\infty \Phi_1'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi''\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha$$

et par suite

$$(29) \quad \mathcal{F}_1 - \frac{1}{m^2 + n^2 - \lambda^2} \frac{\partial^4 \mathcal{F}_1}{\partial t^4} = \int_0^\infty \Phi_1'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \left[\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) + \psi''\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \right] d\alpha.$$

Mais la fonction ψ satisfait, nous le savons, à l'équation différentielle

$$\psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}};$$

donc

$$\psi\left(\frac{t^2}{2x^2}\right) + \psi\left(\frac{t^2}{2x^2}\right) = \frac{x}{t\sqrt{2}};$$

par suite, le second membre de (29) devient

$$\frac{1}{t\sqrt{2}} \int_0^\infty \Phi_1\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \alpha d\alpha = \frac{1}{t\sqrt{2}} \int_0^\infty d\Phi_1 = \frac{1}{t\sqrt{2}} [\Phi_1(\infty) - \Phi_1(0)].$$

Or il est évident sur la formule (26 bis) que $\Phi_1(0)$ est nul, puisque Φ_1 contient T en facteur. Je dis que $\Phi_1(\infty)$ est nul aussi; en effet, dans l'intégrale (26 bis), μ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$; je décompose cet intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$ en deux autres $(0, \varepsilon)$ et $(\varepsilon, \frac{\pi}{2})$, ε étant un nombre fixe très petit; l'intégrale prise entre $\mu = \varepsilon$ et $\mu = \frac{\pi}{2}$ tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{T}$, à cause du facteur évanouissant $e^{-\lambda T \sin \mu}$, dans lequel $\sin \mu$ est plus grand que le nombre fixe $\sin \varepsilon$. Je dis que l'intégrale prise entre $\mu = 0$ et $\mu = \varepsilon$ tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{T}$; en effet, dans cet intervalle, $\cos \mu$ diffère très peu de 1, et $\sin \mu$ diffère très peu de μ ; l'intégrale à évaluer est donc comparable à la suivante :

$$\int_{\mu=0}^{\mu=\varepsilon} T d\mu \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos m(x + T \cos \theta) \cos n(y + T \sin \theta) e^{-\lambda(z + T \mu)} d\theta;$$

Or cette dernière est le produit de deux intégrales simples, dont l'une,

$$\int_0^\varepsilon e^{-\lambda(z + T \mu)} T d\mu = e^{-\lambda z} \int_{v=0}^{v=\varepsilon T} e^{-\lambda v} dv,$$

reste essentiellement finie quand T croît indéfiniment (puisque λ est positif), et dont l'autre

$$\int_0^{2\pi} \cos m(x + T \cos \theta) \cos n(y + T \sin \theta) d\theta,$$

tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{T}$ (comme on s'en convainc facilement par le changement de variable $T \cos \theta = \tau$).

Il est donc établi que $\Phi_1(\infty)$ est nul, comme $\Phi_1(0)$; donc le second

membre de (29) est nul, et l'on a

$$\mathcal{F}_1 - \frac{1}{m^2 + n^2 - \lambda^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial t^2} = 0;$$

d'où, intégrant,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = & A \sin \sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2} t + B \cos \sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2} t \\ & + C e^{-\sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2} t} + D e^{\sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2} t}, \end{aligned}$$

A, B, C, D étant des constantes ne dépendant que de m, n, x, y, z . Or $\mathcal{F}_1$ ne devenant pas infinie pour $t = +\infty$, D est nul. D'ailleurs, d'après (28), $\mathcal{F}_1$ et $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial t^2}$ s'annulent pour $t = 0$ [puisque $\psi(0)$ et $\psi'(0)$ sont nuls]; donc

$$B + C = 0 \quad \text{et} \quad -B + C = 0,$$

ce qui donne $B = C = 0$; et il reste

$$\mathcal{F}_1 = A \sin \sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2} t,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} \right)_{t=0} = A \sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2};$$

mais, d'après (28), on a aussi

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} \right)_{t=0} = \Phi'_1(0) \int_0^\infty \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \Phi'_1(0),$$

d'où la valeur de A

$$A = \frac{\pi}{4\sqrt{2} \sqrt[4]{m^2 + n^2 - \lambda^2}} \Phi'_1(0).$$

Mais rappelons-nous que Φ_1 est un potentiel sphérique (ou, pour mieux dire, *la moitié* d'un potentiel sphérique, puisque l'intégration par rapport à μ n'est faite qu'entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et non entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$); on aura donc, d'après une propriété connue (*Cours d'Analyse* de M. Boursinesq, t. II, fasc. 2, p. 197),

$$\Phi'_1(0) = 2\pi\rho(x, y, z) = 2\pi \cos mx \cos ny e^{-\lambda z};$$

par suite

$$A = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{m^2+n^2-\lambda^2}} \cos mx \cos ny e^{-\lambda z},$$

et enfin

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \cos mx \cos ny e^{-\lambda z} \frac{\sin \sqrt[4]{m^2+n^2-\lambda^2} t}{\sqrt[4]{m^2+n^2-\lambda^2}}.$$

Cette formule a été établie, en supposant λ positif et non nul; mais les deux membres sont des fonctions continues de λ pour la valeur $\lambda = 0$; donc il est permis de faire $\lambda = 0$, ce qui donne

$$\mathcal{F} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \cos mx \cos ny \frac{\sin \sqrt[4]{m^2+n^2} t}{\sqrt[4]{m^2+n^2}}.$$

Portant cette valeur de $\mathcal{F}$ dans la formule (26), il vient, comme expression du potentiel des vitesses,

$$\varphi = \frac{dq}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \cos mx \cos ny \frac{\sin \sqrt[4]{m^2+n^2} t}{\sqrt[4]{m^2+n^2}} dm dn,$$

identique au potentiel trouvé par Poisson (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. I, p. 137). Si maintenant, au lieu des coordonnées rectangulaires x, y et m, n , nous prenons des coordonnées polaires R, θ , et ρ, ω , en posant

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta; \quad m = \rho \cos \omega, \quad n = \rho \sin \omega$$

(voir, pour ce changement de variables, *Mémoire de Poisson*, p. 138, et aussi *Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, p. 530), l'expression précédente de φ se transforme en

$$(30) \quad \varphi = \frac{dq}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty e^{-z\rho} \cos(\rho R \cos \omega) \sin(\sqrt{\rho} t) \sqrt{\rho} d\rho,$$

qui, comme on devait s'y attendre, est indépendante de l'azimut θ du point (x, y, z) .

Nous pouvons maintenant obtenir facilement le développement de φ en série; on a

$$\sin \sqrt{\rho} t = \sqrt{\rho} t - \frac{(\sqrt{\rho} t)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\rho} t)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(\sqrt{\rho} t)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots;$$

V.

6

portant cette valeur dans l'expression (30) de φ , il vient

$$(31) \quad \varphi = \frac{dq}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty d\rho \left[t\rho e^{-z\rho} \cos(\rho R \cos \omega) - \frac{t^3}{3!} \rho^3 e^{-z\rho} \cos(\rho R \cos \omega) + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \rho^{n+1} e^{-z\rho} \cos(\rho R \cos \omega) + \dots \right].$$

Or la série entre crochets est uniformément convergente pour ρ compris entre zéro et un nombre arbitrairement grand; on peut donc l'intégrer terme à terme.

Si nous posons

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty e^{-z\rho} \cos(\rho R \cos \omega) d\rho = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

(voir, pour cette identité, *Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, t. II, fasc. 2, p. 531), on aura

$$\frac{\partial^{n+1} Z}{\partial z^{n+1}} = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty \rho^{n+1} e^{-z\rho} \cos(\rho R \cos \omega) d\rho,$$

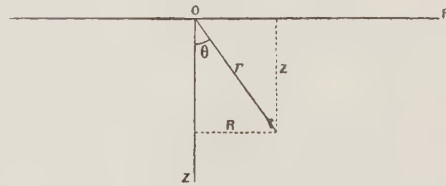
et cette intégrale (convergente si z n'est pas nul) est précisément le coefficient de $-\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dans (31); on aura par suite

$$(32) \quad \varphi = -\frac{dq}{\pi^2} \left[t \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{n+1} Z}{\partial z^{n+1}} + \dots \right]$$

[cf. *Mémoire de Poisson*, p. 146, formule (b)].

Or si, dans l'azimut considéré, on prend, au lieu des coordonnées

Fig. 3.



rectangulaires R et z , des coordonnées polaires, en posant

$$z = r \cos \theta, \quad R = r \sin \theta,$$

on aura

$$Z = \frac{\pi}{2} \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^n Z}{\partial z^n} = \frac{\pi}{2} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n};$$

or, on établit facilement, par récurrence, la formule

$$\frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n} = \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

où P_n désigne le *polynome de Legendre* d'indice n . Rappelons, en effet, la définition des polynomes de Legendre : l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}}$$

peut, pour $|x| < 1$, se développer suivant les puissances croissantes de x par la formule

$$(\alpha) \quad \frac{1}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + P_1(\cos \theta)x + P_2(\cos \theta)x^2 + \dots + P_n(\cos \theta)x^n + \dots,$$

où les coefficients des diverses puissances de x (qui sont des polynomes en $\cos \theta$) ont reçu le nom de *polynomes de Legendre*. Différentions les deux membres de cette formule (α) par rapport à x : il vient

$$(\beta) \quad \frac{\cos \theta - x}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(\cos \theta) + 2P_2(\cos \theta)x + \dots \\ + nP_n(\cos \theta)x^{n-1} + (n+1)P_{n+1}(\cos \theta)x^n + \dots$$

(la différentiation terme à terme est légitime, puisque la série obtenue est uniformément convergente pour $|x| < 1$); différencions de même les deux membres de (α) par rapport à $\cos \theta$: nous obtenons

$$(\gamma) \quad \frac{x}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{\frac{3}{2}}} = P'_1(\cos \theta)x + P'_2(\cos \theta)x^2 + \dots + P'_n(\cos \theta)x^n + \dots,$$

où P'_n désigne la dérivée de P_n par rapport à la variable $\cos \theta$ dont il

dépend. Je multiplierai respectivement ces trois identités (α) , (β) , (γ) , par $\cos \theta$, $x \cos \theta$, $-\sin^2 \theta$, et je les ajouterai membre à membre; j'obtiendrai comme premier membre

$$\frac{\cos \theta (1 - 2x \cos \theta + x^2) + x \cos \theta (\cos \theta - x) - x \sin^2 \theta}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos \theta - x}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire précisément le premier membre de (β) ; donc, dans le second membre de ma combinaison, le coefficient de x^n sera égal à $(n+1)P_{n+1}(\cos \theta)$; or ce coefficient de x^n dans la combinaison est

$$\begin{aligned} & \cos \theta P_n(\cos \theta) + n \cos \theta P_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta) \\ &= (n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta); \end{aligned}$$

on a donc l'identité

$$(\delta) \quad (n+1) P_{n+1}(\cos \theta) = (n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta),$$

qui est une relation de récurrence entre *deux* polynomes de Legendre consécutifs, et permettra de les calculer tous en partant du premier $P_0 = 1$. On a

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}, \quad \dots$$

Ceci posé, revenons au calcul de $\frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n}$; on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{P_1(\cos \theta)}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} &= \frac{2}{r^3} \frac{\partial r}{\partial z} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{2 \cos^2 \theta}{r^3} - \frac{\sin^2 \theta}{r^3} = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} = \frac{2}{r^3} P_2(\cos \theta); \end{aligned}$$

supposons alors qu'on ait, pour la dérivée d'ordre n , la formule

$$\frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n} = \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta);$$

je dis que cette formule subsistera pour la dérivée d'ordre $n+1$; on

aura, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1} \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^{n+1}} &= (-1)^n n! \left[\frac{-(n+1)}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial z} P_n(\cos \theta) - \frac{1}{r^{n+1}} P'_n(\cos \theta) \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n!}{r^{n+2}} [(n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta)],\end{aligned}$$

qui s'écrit d'après l'identité (δ)

$$\frac{\partial^{n+1} \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^{n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{r^{n+2}} P_{n+1}(\cos \theta);$$

c'est la formule qu'il fallait établir.

Si nous considérons maintenant la formule (32) qui donne φ , nous pourrions l'écrire

$$\begin{aligned}(33) \quad \varphi &= \frac{d\eta}{2\pi} \left[\frac{t}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{t^3}{3r^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)r^{n+2}} P_{n+1}(\cos \theta) + \dots \right].\end{aligned}$$

La convergence de cette série est aussi rapide que dans le cas de deux dimensions, car il est bien connu que, lorsque $\cos \theta$ varie entre -1 et $+1$, $P_n(\cos \theta)$ a pour valeur absolue maxima l'unité [d'ailleurs il est manifeste, sur la formule (α), que $|P_n(\cos \theta)|$ ne peut pas, quand n croît indéfiniment, avoir une limite supérieure plus grande que 1, puisque la série du second membre a pour rayon de convergence l'unité].

En différentiant par rapport à t les deux membres de cette formule (33), nous obtiendrons finalement pour la dénivellation $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ la formule suivante :

$$\begin{aligned}h &= \frac{d\eta}{2\pi r^2} \left[P_1(\cos \theta) - \frac{t^2}{r} P_2(\cos \theta) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(n+2)(n+3)\dots 2nr^n} P_{n+1}(\cos \theta) + \dots \right],\end{aligned}$$

ou bien, posant $\frac{t^2}{2r} = \frac{1}{\gamma}$,

$$h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[P_1(\cos \theta) - \frac{2P_2(\cos \theta)}{\gamma} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{2^n}{(n+2)(n+3)\dots 2n} \frac{P_{n+1}(\cos \theta)}{\gamma^n} + \dots \right],$$

formule analogue à celle obtenue par M. Rousier dans le cas de deux dimensions, et d'où l'on peut déduire les mêmes conséquences : en particulier, que la propagation du mouvement, sur une droite d'inclinaison quelconque partant du centre d'ébranlement, est uniformément accélérée.

Si, dans cette dernière formule, nous faisons $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ce qui est légitime pour la même raison que dans le cas de deux dimensions), nous retrouverons le développement connu de la dénivellation à la surface; en effet, on a toujours $P_i(0) = 0$ si i est impair (puisque le degré de tous les termes de P_i est de même parité que i); et, si i est pair, soit $i = 2m + 2$, on a

$$P_{2m+2}(0) = (-1)^{m+1} \frac{1.3.5\dots(2m+1)}{2.4.6\dots(2m+2)}$$

[comme on le déduit immédiatement de la relation de récurrence bien connue entre trois polynômes de Legendre consécutifs, et comme on peut aussi le voir en faisant $\cos \theta = 0$ dans la formule (α)].

Il vient donc, pour la dénivellation à la surface,

$$h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1.3}{2.4} \frac{2^3}{5.6} \frac{1}{\gamma^3} + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1.3.5\dots(2m+1)}{2.4.6\dots(2m+2)} \frac{2^{2m+1}}{(2m+3)(2m+4)\dots(4m+2)} \frac{1}{\gamma^{2m+1}} \mp \dots \right].$$

Or je dis qu'on a l'identité numérique

$$\frac{1.3.5\dots(2m+1)}{2.4.6\dots(2m+2)} \frac{2^{2m+1}}{(2m+3)(2m+4)\dots(4m+2)} \\ = \frac{1}{(2.4.6\dots 2m)(2m+3)(2m+5)\dots(4m+1)},$$

qui s'écrit en supprimant des facteurs communs

$$\frac{2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{(m+1)(m+2) \dots (2m+1)} = 1;$$

identité évidente, puisque multipliant haut et bas par

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m = 2^m \cdot m!$$

elle s'écrit

$$\frac{2^m (2m+1)!}{2^m (2m+1)!} = 1.$$

Nous avons donc pour la dénivellation à la surface

$$h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2 \cdot 5} \frac{1}{\gamma^3} + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m)(2m+3)(2m+5) \dots (4m+1)} \frac{1}{\gamma^{2m+1}} \mp \dots \right);$$

qui est bien la formule trouvée par Poisson et par M. Boussinesq (*Mémoire de Poisson*, p. 153; *Cours d'Analyse* de M. Boussinesq, t. II, fasc. 2, p. 513).

VI. — Formation directe du développement en série du potentiel des vitesses.

Si l'on n'avait eu pour but que le développement (33) de la fonction φ en série, voici comment on aurait pu l'obtenir immédiatement; et cette remarque va permettre d'intégrer en quelques lignes le problème des ondes d'émergence (ou d'impulsion) dans le cas d'un liquide indéfini.

Récrivons les équations du problème des ondes par émergence,

Équations indéfinies :

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Condition aux limites (à l'infini) :

$$\varphi = 0.$$

État initial (pour $t = 0$ et $z = 0$) :

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x, y),$$

et cherchons à satisfaire formellement à ce problème par un développement de Taylor :

$$(34) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{t}{1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 + \frac{t^2}{1.2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_0 + \dots + \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0 + \dots,$$

$\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0$ représentant la valeur de $\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}$ pour $t = 0$ (c'est une fonction de x, y et z). Nous allons déterminer de proche en proche tous ces coefficients.

φ_0 est la fonction harmonique, définie dans tout l'espace au-dessous du plan des xy , s'annulant à l'infini et s'annulant à la surface; donc $\varphi_0 = 0$ identiquement.

$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0$ est la fonction harmonique, définie dans tout l'espace au-dessous du plan des xy , s'annulant à l'infini, et prenant à la surface les valeurs connues $F(x, y)$. Donc on a

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{z F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

que j'écris simplement

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 = \frac{dq}{2\pi} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en me plaçant dès maintenant dans le cas d'une solution simple naturelle; cette formule de $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0$ donne la dénivellation statique initiale (cf. *Thèse* de M. Rousier, p. 30).

Nous connaissons donc les deux premiers coefficients φ_0 et $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0$ du développement (34). Pour avoir $\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0$, différencions $(n - 2)$ fois

par rapport à t la seconde équation indéfinie du problème, il vient

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial t^{n-2}} \right) - \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} = 0;$$

cette relation donne, en y faisant $t = 0$,

$$(35) \quad \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial t^{n-2}} \right)_0,$$

formule de récurrence qui permet de calculer de proche en proche tous les coefficients de la série (34). On en déduit

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^{2m} \varphi}{\partial t^{2m}} \right)_0 = 0$$

pour les coefficients des puissances paires de t , et

$$\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial^5 \varphi}{\partial t^5} \right)_0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0, \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial^{2m+1} \varphi}{\partial t^{2m+1}} \right)_0 = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0,$$

pour les coefficients des puissances impaires de t . Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 &= \frac{dq}{2\pi} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left[\frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= -\frac{dq}{2\pi} \frac{\partial^{m+1}}{\partial z^{m+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \frac{(-1)^m (m+1)!}{r^{m+2}} P_{m+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Par conséquent, notre série (34) s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{dq}{2\pi} \left[\frac{t}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{t^3}{3r^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(m+2)(m+3)\dots(2m+1)r^{m+2}} P_{m+1}(\cos \theta) + \dots \right], \end{aligned}$$

identique au développement (33); cette série satisfait *formellement* au problème; d'ailleurs elle est évidemment convergente; donc elle représente la solution.

Il est évident que la même remarque s'appliquerait au problème des ondes par impulsion (la série ne contiendrait alors que des puissances *paires* de t) et qu'elle s'appliquerait aussi sans modification dans le cas de deux dimensions.

On peut observer que la série (33) (dont tous les termes sont des fonctions harmoniques) converge pour toute valeur réelle ou imaginaire de t ; la solution est donc une fonction *analytique entière* en t ; la même remarque aurait pu être faite en prenant le potentiel des vitesses, soit sous la forme de Poisson, soit sous celle de M. Boussinesq; cela résulte de ce que les fonctions $\sin\sqrt{m}t$ et $\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$ sont des fonctions analytiques entières de t . La fonction φ étant analytique, nous pouvons y faire t négatif; d'ailleurs, si l'on fait t négatif, le potentiel φ ne fait que changer de signe; cela veut dire que si, à un instant quelconque du mouvement, on changeait le signe de toutes les vitesses, le fluide repasserait par tous ses états antérieurs, mais avec des vitesses inverses: c'est la propriété bien connue de la réversibilité des trajectoires en Mécanique rationnelle. En particulier si l'on voulait, pour des ondes par émergence, se représenter l'état initial comme résultant d'un état antérieur, il faudrait imaginer des ondes venant de l'infini et convergeant vers l'origine des coordonnées, où leur concentration produirait une dénivellation locale, à l'instant précis où toutes les vitesses s'annuleraient.

Je terminerai par une remarque relative aux ondes liquides, tant d'émergence que d'impulsion, dans le cas du mouvement plan à deux dimensions. Poisson, qui a intégré le problème dans le cas d'une profondeur h quelconque, a montré (p. 89 de son Mémoire) que si h est très petit, la formule qui donne le potentiel des vitesses se réduit à

$$\varphi = f(x + t\sqrt{h}) + F(x - t\sqrt{h});$$

on retombe donc sur la formule de Lagrange; en choisissant arbitrairement les fonctions f et F on retrouve ainsi tous les cas particuliers des ondes dans un canal peu profond (ondes progressive, stationnaire, de translation, etc.). On peut de même rattacher aux formules générales, dans le cas d'une profondeur indéfinie, la théorie de la *houle*. Reprenons, en effet, le problème des ondes d'émergence et d'impulsion avec les données initiales les plus générales

$$\varphi = F(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x) \quad (\text{pour } t = 0 \text{ et } z = 0)$$

La méthode de M. Boussinesq nous donne la solution

$$\varphi = \int_0^\infty \left[\chi \left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z \right) + \chi \left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z \right) \right] \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha \\ + \int_0^\infty \left[\chi_1 \left(x + \frac{t^2}{2\beta^2}, z \right) + \chi_1 \left(x - \frac{t^2}{2\beta^2}, z \right) \right] \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta;$$

les fonctions $\chi(x, z)$, $\chi_1(x, z)$ étant harmoniques dans tout le liquide s'annulant aux grandes profondeurs et prenant respectivement à la surface les valeurs données $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x)$ et $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x)$.

Choisissons pour f et F les fonctions suivantes :

$$F(x) = A \sin mx, \quad f(x) = A\sqrt{m} \cos mx,$$

A et m étant deux constantes. On aura alors

$$\chi_1(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A e^{-mz} \sin mx, \quad \chi(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A\sqrt{m} e^{-mz} \cos mx.$$

Ces deux fonctions ne s'annulent pas, il est vrai, pour x infini et z quelconque; mais la fonction φ n'en conserve pas moins un sens parfaitement déterminé, et n'en satisfait pas moins aux équations indéfinies du problème, comme nous allons le voir. On a, en effet,

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A\sqrt{m} e^{-mz} \int_0^\infty \left[\cos m \left(x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \cos m \left(x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha \\ + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A e^{-mz} \int_0^\infty \left[\sin m \left(x + \frac{t^2}{2\beta^2} \right) + \sin m \left(x - \frac{t^2}{2\beta^2} \right) \right] \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta,$$

qui s'écrit

$$\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} A\sqrt{m} e^{-mz} \cos mx \int_0^\infty \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha \\ + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} A e^{-mz} \sin mx \int_0^\infty \cos \frac{m t^2}{2\beta^2} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Or la première intégrale est précisément celle que nous avons rencontrée plus haut, et appelée $\mathcal{F}(m, t)$; nous avons calculé sa valeur :

$$\mathcal{F}(m, t) = \int_0^\infty \cos \frac{m\alpha^2}{2} \psi \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}t;$$

la seconde intégrale n'est autre que la dérivée de la première par rapport au temps, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \cos \frac{mt^2}{2\beta^2} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cos \sqrt{m} t.$$

Nous avons donc pour le potentiel des vitesses

$$\varphi = A e^{-mz} (\cos mx \sin \sqrt{m} t + \sin mx \cos \sqrt{m} t) = A e^{-mz} \sin (\sqrt{m} t + mx);$$

sous cette forme, nous voyons bien qu'il satisfait aux équations indéfinies

$$\Delta_2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

et nous reconnaissons le potentiel des vitesses qui caractérise la houle.

On serait arrivé au même résultat en partant du développement (34) de φ en série de Taylor, et prenant

$$\varphi_0 = A e^{-mz} \sin mx, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 = A \sqrt{m} e^{-mz} \cos mx,$$

les coefficients suivants étant calculés par la formule de récurrence (35), les puissances paires de t auraient alors donné le développement de $\cos \sqrt{m} t$, les puissances impaires de t celui de $\sin \sqrt{m} t$.

DEUXIÈME PARTIE.

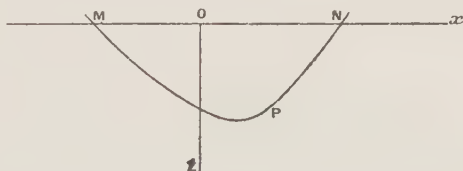
ÉTUDE DES OSCILLATIONS D'UN LIQUIDE PESANT DANS UN VASE
DE FORME QUELCONQUE.

I. — Cas du mouvement plan.

Nous abordons maintenant l'étude du mouvement d'un liquide pesant renfermé dans un vase de forme quelconque, lorsque ce mouvement est dû à des causes exclusivement superficielles. On sait qu'alors le problème dépend d'un potentiel des vitesses, et nous avons formé plus haut les équations auxquelles doit satisfaire ce potentiel, que nous appelons φ .

Nous plaçant d'abord dans le cas du mouvement plan à deux dimensions, nous prenons pour plan des xz le plan parallèlement auquel se fait le mouvement, l'axe des z vertical et dirigé vers le bas, l'axe des x coïncidant avec la surface libre du liquide à l'état de repos (*fig. 4*).

Fig. 4.



Il s'agit de former une fonction $\varphi(x, z, t)$, définie dans le domaine MPNM (c'est-à-dire dans tout le fluide), et satisfaisant aux conditions suivantes (en négligeant, bien entendu, les carrés et produits des déplacements et des vitesses, et faisant, comme plus haut, $g = 1$) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Équation indéfinie.....} \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\ \text{Conditions aux limites} \left\{ \begin{array}{l} \text{aux parois MPN...} \quad \frac{d\varphi}{dn} = 0 \\ \text{à la surface MN...} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \\ \text{État initial (pour } t = 0 \text{ et } z = 0) \dots \dots \quad \varphi = F(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x). \end{array} \right.$$

nous bornant aux ondes par émergence, nous supposons la fonction $F(x)$ nulle, c'est-à-dire les vitesses initiales nulles; le cas des ondes par impulsion [où ce serait la dénivellation initiale $f(x)$ qui serait nulle] se déduit du précédent par une simple différentiation, comme nous l'avons déjà vu; et le cas général, où aucune des fonctions F et f n'est nulle, résulte de la superposition par addition des deux précédents, puisque toutes les équations du problème sont linéaires.

Cherchons à satisfaire aux trois premières équations (1) par des *solutions simples* de la forme

$$(2) \quad \varphi = \frac{\sin}{\cos}(\sqrt{k}t) U(x, z);$$

comme pour $t=0$ on doit avoir $\varphi=0$, ce sont les solutions avec $\sin(\sqrt{k}t)$ qui conviendront; les solutions avec $\cos(\sqrt{k}t)$ conviendraient au contraire aux ondes par impulsion.

Si nous substituons cette valeur (2) de φ dans les trois premières équations (1), il vient, pour déterminer la fonction U , les conditions suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Équation indéfinie.....} \quad \Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \\ \text{Conditions aux limites} \left\{ \begin{array}{l} \text{aux parois MPN...} \quad \frac{dU}{dn} = 0 \\ \text{à la surface MN...} \quad \frac{\partial U}{\partial z} + kU = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous reconnaissons les équations des températures stationnaires du vase (supposé solide et isotrope), dont les parois MPN sont imperméables à la chaleur, et dont la surface MN rayonne vers un espace à la température zéro; donc, lorsque le coefficient de rayonnement ($-k$) sera positif, nous n'aurons pas d'autre solution que $U=0$; mais nous prévoyons que pour certaines valeurs *positives* de k , nous aurons, pour le système (3), des solutions non nulles. C'est ce que nous allons reconnaître en ramenant la résolution de ce système à celle d'une équation de Fredholm. Il s'agit de déterminer une fonction harmonique $U(x, z)$, continue dans le domaine MNPM, et dont la

dérivée normale $\frac{dU}{dn}$ prend, à la frontière, les valeurs suivantes :

$$\text{Aux parois MPN} \dots \dots \frac{dU}{dn} = 0$$

$$\text{A la surface MN} \dots \dots \frac{dU}{dn} = -kU.$$

Appelons $c(s)$ une fonction du point quelconque s de la frontière, fonction qui sera nulle si s est sur les parois MPN, et qui sera égale à 1 si s est sur la surface horizontale MN : nous posons donc

$$c(s) = 1 \quad \text{sur la surface horizontale MN,}$$

$$c(s) = 0 \quad \text{sur les parois MPN.}$$

(Il y a lieu de remarquer que cette fonction $c(s)$ n'est jamais négative.) Nous aurons alors, pour tout point s de la frontière,

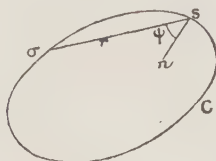
$$\frac{dU}{dn} = -kc(s)U,$$

et le système (3) s'écrit

$$(3 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Équation indéfinie} \dots \dots \Delta_2 U = 0 \\ \text{Condition au contour} \dots \dots \frac{dU}{dn} = -kcU \end{array} \right.$$

Laissons de côté, pour le moment, la difficulté provenant de ce que la frontière présente deux points anguleux M et N, et, prenant le cas d'un contour C sans singularités (*fig. 5*), ramenons l'étude du pro-

Fig. 5.



blème (3 bis) à celle d'une équation de Fredholm, en suivant une méthode indiquée par M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. XXIII, p. 507).

Imaginons, répandue sur le contour C, une *simple couche* de

matière attirante, dont la densité soit ρ_σ au point quelconque σ du contour; appelons U le potentiel logarithmique dû à cette couche

$$(4) \quad U = \int_c \rho_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma,$$

r désignant la distance du point attiré au point σ du contour et $d\sigma$ désignant l'élément d'arc du contour. On sait que ce potentiel U satisfait, en chaque point s du contour, aux deux équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dn'} - \frac{dU}{dn} \right) &= \pi \rho_s, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dn'} + \frac{dU}{dn} \right) &= \int_c \rho_\sigma \frac{\cos \psi}{r} d\sigma, \end{aligned}$$

où $\frac{dU}{dn'}$ désigne la valeur de la dérivée normale extérieurement au contour, r la distance des deux points s et σ , et ψ l'angle de la direction r avec la normale intérieure en s (les deux dérivées normales $\frac{dU}{dn'}$, $\frac{dU}{dn}$ sont prises dans le sens de la normale intérieure). L'élimination de $\frac{dU}{dn'}$ conduit à la relation

$$(5) \quad \pi \rho_s - \int_c \rho_\sigma \frac{\cos \psi}{r} d\sigma = - \frac{dU}{dn},$$

à laquelle satisfait la densité ρ en tout point du contour.

Cherchons à déterminer cette densité ρ de façon que le potentiel (4) soit une solution du problème (3 *bis*). Comme ce potentiel est une fonction harmonique, il suffira de satisfaire à la condition à la frontière

$$\frac{dU}{dn} = -kcU = -kc(s) \int_c \rho_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma;$$

portant cette valeur de $\frac{dU}{dn}$ dans (5), il vient, pour déterminer ρ , l'équation fonctionnelle

$$\pi \rho_s - \int_c \rho_\sigma \frac{\cos \psi}{r} d\sigma = kc(s) \int_c \rho_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma,$$

qui s'écrit, en faisant passer sous le signe $\int$ la quantité $kc(s)$ qui ne dépend pas de σ ,

$$(6) \quad \rho_s - \frac{1}{\pi} \int_G \left[\frac{\cos \psi}{r} + kc(s) \log \frac{1}{r} \right] \rho_\sigma d\sigma = 0;$$

il s'agit de prouver que, pour k quelconque, cette équation n'aura pas d'autre solution que $\rho = 0$, mais que, pour une infinité de valeurs de k , racines d'une certaine équation transcendante entière, elle admettra des solutions non nulles.

Considérant un moment k comme fixe, et introduisant un paramètre λ , nous obtenons l'équation de Fredholm sans second membre

$$(7) \quad \rho_s - \frac{\lambda}{\pi} \int_G \left[\frac{\cos \psi}{r} + kc(s) \log \frac{1}{r} \right] \rho_\sigma d\sigma = 0.$$

Cette équation, on le sait, n'admettra pas, si λ est quelconque, d'autre solution que $\rho = 0$; mais pour certaines valeurs de λ , que nous appellerons des *pôles*, elle admettra des solutions non nulles. D'après la théorie générale de l'équation de Fredholm, ces valeurs singulières de λ ne dépendent que du *noyau*

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \psi}{r} + kc(s) \log \frac{1}{r} \right],$$

c'est-à-dire ne dépendent que de la frontière et de k ; la frontière étant donnée, elles ne dépendront que de k . Donc, pour k quelconque, la valeur $\lambda = 1$ ne sera pas un pôle, et l'équation (6) n'admettra pas d'autre solution que $\rho = 0$; mais pour certaines valeurs singulières de k , la valeur $\lambda = 1$ sera un pôle, et nous aurons alors pour (6) une solution ρ non nulle, qui nous donnera un potentiel U comme solution correspondante du système (3 *bis*) ou (3). Nous allons voir que ces valeurs singulières de k sont toutes les racines d'une certaine équation transcendante entière en k , que nous allons former; puis nous démontrerons que toutes ces valeurs sont réelles, positives, et en nombre infini comme des considérations d'ordre physique nous l'avaient fait prévoir.

Si nous posons

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \frac{\psi}{r}}{r} + k c(s) \log \frac{1}{r} \right] = F(s, \sigma),$$

nous remarquons que ce noyau ne devient infini que quand les deux points s et σ du contour coïncident, et qu'alors il devient infini comme un logarithme (puisque, le contour C étant sans singularités, $\frac{\cos \psi}{r}$ reste borné). Avec cette notation, l'équation (7) s'écrit

$$\rho_s - \lambda \int_C F(s, \sigma) \rho_\sigma d\sigma = 0;$$

les valeurs singulières de λ sont les racines d'une certaine équation

$$D(\lambda) = 0,$$

que la théorie générale apprend à former, et dont les coefficients dépendent de k , puisque F en dépend. Pour que k soit singulier, il faut et il suffit que $\lambda = 1$ soit singulier; donc l'équation qui donnera les valeurs de k sera

$$D(1) = 0;$$

c'est cette équation que nous allons écrire; formons d'abord $D(\lambda)$.

Le noyau ne devenant infini que comme un logarithme (c'est-à-dire avec un ordre d'infinitude inférieur à $\frac{1}{2}$), nous pourrions employer la méthode de M. Hilbert; posons

$$F \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & F(x_1, y_2) & F(x_1, y_3) & \dots & F(x_1, y_n) \\ F(x_2, y_1) & 0 & F(x_2, y_3) & \dots & F(x_2, y_n) \\ F(x_3, y_1) & F(x_3, y_2) & 0 & \dots & F(x_3, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(x_n, y_1) & F(x_n, y_2) & F(x_n, y_3) & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

la fonction $D(\lambda)$ sera la suivante :

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1} \int F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int \int F \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 - \dots \\ \pm \frac{\lambda^n}{n!} \int \int \dots \int F \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n \mp \dots;$$

dans cette série, le coefficient de λ^n est un polynôme de degré n en k , que j'appelle $P_n(k)$, et le module de ce coefficient reste, d'après M. Hilbert, inférieur à

$$\frac{Q^n}{n^n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}},$$

Q étant un nombre fixe (dépendant du module de k) et ε un nombre aussi petit qu'on veut; ce qui prouve que $D(\lambda)$ est une fonction entière de λ .

L'équation qui donne les valeurs singulières de k est

$$D(1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$0 = 1 + P_1(k) + P_2(k) + \dots + P_n(k) + \dots;$$

c'est une équation transcendante entière en k , puisque le second membre est une série absolument convergente pour toute valeur de k . Chaque fois que k sera égal à une des racines de cette équation, l'équation (6) admettra une solution ρ non nulle, qui nous donnera une solution correspondante U du système (3 bis).

Démontrons maintenant qu'aucune des valeurs singulières de k ne sera imaginaire ni négative. Supposons, en effet, qu'il existe une valeur singulière imaginaire $k_1 + ik_2$, et soit $U_1 + iU_2$ la solution correspondante du système (3 bis); cette solution satisfera, tout le long du contour C à l'équation

$$\frac{d(U_1 + iU_2)}{dn} = -(k_1 + ik_2)c(U_1 + iU_2),$$

qui, en annulant séparément les parties réelle et imaginaire, se décompose en les deux suivantes :

$$(7 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{dU_1}{dn} = -k_1 c U_1 + k_2 c U_2, \\ \frac{dU_2}{dn} = -k_2 c U_1 - k_1 c U_2; \end{cases}$$

multiplions ces deux égalités respectivement par $U_2 d\sigma$ et $-U_1 d\sigma$;

ajoutons-les, et intégrons tout le long du contour C : il vient

$$\int_C \left(U_2 \frac{dU_1}{dn} - U_1 \frac{dU_2}{dn} \right) d\sigma = k_2 \int_C c (U_1^2 + U_2^2) d\sigma;$$

or les deux fonctions U_1 et U_2 étant harmoniques et continues à l'intérieur de C, le premier membre est nul; on en déduit $k_2 = 0$; car si l'on avait

$$\int_C c (U_1^2 + U_2^2) d\sigma = 0,$$

on déduirait de (7 bis)

$$\int_C \left(U_1 \frac{dU_1}{dn} + U_2 \frac{dU_2}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

d'où

$$U_1 + i U_2 = \text{const.},$$

et, par suite,

$$k_1 + i k_2 = 0.$$

Il n'existe donc pas de valeur singulière imaginaire.

Soit donc k une valeur singulière réelle; je dis qu'elle n'est pas négative; appelons en effet U la solution correspondante; étant harmonique elle satisfera à l'équation

$$\iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz = - \int_C U \frac{dU}{dn} d\sigma,$$

où l'intégrale double du premier membre est étendue à l'aire entourée par la courbe C; mais puisque sur le contour on a

$$\frac{dU}{dn} = -k c U,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz = k \int_C c U^2 d\sigma,$$

égalité manifestement impossible si k est négatif (puisque la fonction c n'est jamais négative).

Il faut encore établir qu'il existe effectivement une *infinité* de

valeurs singulières de k . Pour cela, au lieu du système homogène (3 bis), nous étudierons le suivant :

$$(8) \quad \begin{cases} \text{Équation indéfinie.} & \Delta_2 U = 0 \\ \text{Condition à la limite. . . .} & \frac{dU}{dn} + kc(s)U = f(s) \end{cases}$$

où le *second membre* $f(s)$ désigne une fonction arbitraire donnée du point s du contour C , et où nous ne faisons plus aucune hypothèse sur le signe de $c(s)$. Ce système (8), si k est quelconque, admet une solution unique, et cette solution peut se mettre sous la forme d'un potentiel de simple couche, dont la densité est donnée par une équation de Fredholm, qui n'est autre que l'équation (6), mais avec un second membre. Il en résulte que la solution $U(x, z; k)$ du système (8) est une fonction *méromorphe* de k , dont les pôles sont précisément les valeurs singulières qui nous intéressent, valeurs pour lesquelles le système homogène (3 bis) admet une solution. Étudions donc les pôles de cette fonction méromorphe :

1° Nous venons de démontrer que tous les pôles sont réels, et que, lorsque $c(s)$ est positif, aucun d'eux n'est négatif.

2° Montrons que tous les pôles sont *simples*; soit en effet k_0 un pôle; et écrivons le développement de U dans le voisinage de $k = k_0$:

$$U(x, z; k) = \frac{P(x, z)}{(k - k_0)^m} + \frac{Q(x, z)}{(k - k_0)^{m-1}} + \dots;$$

prouvons que P est nul si $m > 1$. Portons ce développement dans (8) et identifions; nous voyons que les fonctions harmoniques P et Q satisfont (sur le contour C) aux conditions suivantes [obtenues en annulant les coefficients de $\frac{1}{(k - k_0)^m}$ et $\frac{1}{(k - k_0)^{m-1}}$] :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dn} + k_0 c(s)P = 0, \\ \frac{dQ}{dn} + k_0 c(s)Q + c(s)P = 0, \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$P \frac{dQ}{dn} - Q \frac{dP}{dn} + c(s)P^2 = 0,$$

et, par suite,

$$\int_c c(s) P^2 ds = - \int_c \left(P \frac{dQ}{dn} - Q \frac{dP}{dn} \right) ds = 0;$$

alors la première relation (9) donne (en supposant $k_0 \neq 0$)

$$\int P \frac{dP}{dn} ds = 0 = - \iint \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz,$$

et, par suite, $P = \text{const.}$, et cette constante est nulle d'après la première équation (9).

3° La valeur $k = 0$ est évidemment un pôle [puisque, pour $k = 0$, le système homogène (3 bis) admet la solution $U = \text{const.}$]; je dis que $k = 0$ est un pôle simple. En effet, si l'on avait, au voisinage de $k = 0$,

$$U = \frac{P}{k^m} + \frac{Q}{k^{m-1}} + \dots \quad (\text{avec } m > 1),$$

les fonctions harmoniques P , Q , satisferaient, sur le contour, aux conditions

$$\frac{dP}{dn} = 0, \quad \frac{dQ}{dn} + c(s) P = 0;$$

la première donne $P = \text{const.}$, et la seconde donne

$$\int \frac{dQ}{dn} ds + P \int c(s) ds = 0,$$

d'où l'on déduit $P = 0$, car nous supposons

$$\int_c c(s) ds \neq 0.$$

Ces remarques faites, l'emploi des *constantes de Schwarz* nous permettra de démontrer l'existence d'une infinité de pôles ou valeurs singulières de k . Nous suivrons la marche indiquée par M. Sanielevici (p. 48 et suiv. de sa *Thèse*; Gauthier-Villars, 1908).

La fonction $U(x, z; k)$, admettant le point $k = 0$ comme pôle simple, aura, au voisinage de $k = 0$, un développement de la forme

$$(10) \quad U(x, z; k) = \frac{\alpha}{k} + u_0(x, z) + k u_1(x, z) + k^2 u_2(x, z) + \dots,$$

la série des u ayant (dans le plan de la variable k) un rayon de convergence non nul. Pour déterminer les coefficients de ce développement (10), nous le porterons dans (8) et identifierons; il viendra, pour déterminer les fonctions harmoniques α , u_0 , u_1 , u_2 , ..., les conditions au contour suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dn} = 0, \\ \frac{du_0}{dn} + c(s) \alpha = f(s), \\ \frac{du_1}{dn} + c(s) u_0 = 0, \\ \frac{du_2}{dn} + c(s) u_1 = 0, \\ \frac{du_3}{dn} + c(s) u_2 = 0, \\ \dots\dots\dots; \end{array} \right.$$

la première donne $\alpha = \text{const.}$; la seconde déterminera u_0 (à une constante additive près), si la constante α satisfait à

$$\alpha \int_c c(s) ds = \int_c f(s) ds,$$

ce qui est possible puisque nous supposons $\int_c c(s) ds \neq 0$; on choisira la constante additive de u_0 de façon que $\int \frac{du_1}{dn} ds = 0$, c'est-à-dire $\int c(s) u_0 ds = 0$; et ainsi de suite [nous n'avons pas à nous préoccuper de la convergence, puisque $k = 0$ étant un pôle simple, nous sommes certain que la série (10) converge jusqu'au pôle le plus voisin de zéro].

Si nous appelons $U(s; k)$, $u_i(s)$, les valeurs que prennent $U(x, z; k)$, $u_i(x, z)$, sur le contour, nous aurons

$$U(s; k) = \frac{\alpha}{k} + u_0(s) + k u_1(s) + k^2 u_2(s) + \dots,$$

et le rayon de convergence de la série (10) sera (dans le plan de la variable k) le même que celui de cette dernière série, ou encore de la

série suivante :

$$(12) \quad u(s; k) = u_0(s) + k u_1(s) + k^2 u_2(s) + \dots$$

[Remarquons que les $u_i(x, z)$ pouvant être regardés comme des potentiels de simple couche, les valeurs $u_i(s)$, ainsi que les dérivées normales $\frac{du_i}{dn}$, sont parfaitement déterminées.]

Pour établir que la série (10) n'a pas un rayon de convergence infini, il suffit d'établir que la série (12) diverge certainement lorsque $|k|$ dépasse une certaine valeur k_1 .

Nous remplacerons la série (12) dont les coefficients des puissances de k dépendent de s , par une autre à coefficients constants : considérons la fonction

$$\Phi(k) = \int_C c(s) u_0(s) u(s; k) ds;$$

il suffit d'établir que $\Phi(k)$ n'est pas holomorphe dans tout le plan de la variable k . Posons

$$W_n = \int_C c(s) u_0(s) u_n(s) ds.$$

Le développement de $\Phi(k)$ dans le domaine de l'origine est [puisque (12) converge uniformément pour $|k| < k_1$]

$$(13) \quad \Phi(k) = W_0 + k W_1 + k^2 W_2 + \dots$$

Montrons que ce développement ne converge pas dans tout le plan. On a, d'après (11),

$$\int_C c(s) u_p u_q ds = - \int_C u_q \frac{du_{p+1}}{dn} ds;$$

mais les fonctions u_{p+1} et u_q étant harmoniques, on a

$$\int \left(u_q \frac{du_{p+1}}{dn} - u_{p+1} \frac{du_q}{dn} \right) ds = 0;$$

donc le second membre égale $-\int u_{p+1} \frac{du_q}{dn} ds$, c'est-à-dire, d'après (11),

et pour $q \geq 1$,

$$\int_C c(s) u_{p+1} u_{q-1} ds.$$

Il en résulte qu'on peut écrire

$$W_{2n+1} = \int_C c(s) u_n u_{n+1} ds,$$

c'est-à-dire, d'après (11),

$$W_{2n+1} = - \int_C u_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dn} ds,$$

ou encore, puisque u_{n+1} est harmonique dans C ,

$$W_{2n+1} = \iint \left[\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz.$$

Donc les *constantes de Schwarz* d'indice impair sont essentiellement positives et non nulles [d'ailleurs, si $c(s)$ est positif, celles d'indice pair sont aussi positives]. On peut écrire, de même,

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \int c(s) u_n u_{n+1} ds = - \int u_n \frac{du_{n+1}}{dn} ds \\ &= \iint \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial z} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \right) dx dz. \end{aligned}$$

Alors considérons la forme quadratique définie positive en α et β

$$\iint \left[\left(\alpha \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \beta \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} + \beta \frac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz > 0;$$

cette inégalité s'écrit

$$W_{2n-3} \alpha^2 + 2 W_{2n-1} \alpha \beta + W_{2n+1} \beta^2 > 0;$$

on a donc

$$W_{2n-1}^2 < W_{2n-3} W_{2n+1}$$

et, puisque ces nombres sont positifs,

$$\frac{W_{2n-1}}{W_{2n-3}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}}.$$

La suite d'inégalités

$$\frac{W_3}{W_1} < \frac{W_5}{W_3} < \dots < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} < \dots$$

montre que le rapport $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}}$ tend vers une limite finie et non nulle.

Désignant cette limite par $\frac{1}{k_1^2}$, on voit que k_1 est le rayon de convergence de la série (13), et par suite des séries (12) et (10).

Si nous supposons la fonction $c(s)$ positive, k_1 est le seul pôle de U situé sur le cercle de rayon k_1 ; ce pôle est simple et l'on peut écrire

$$(14) \quad U(x, z; k) = \frac{\alpha}{k} + \frac{U_1}{1 - \frac{k}{k_1}} + v_0(x, z) + k v_1(x, z) + k^2 v_2(x, z) + \dots,$$

la série des v convergeant dans un cercle de rayon plus grand que k_1 . Identifiant cette expression (14) avec (10), il vient

$$\frac{U_1}{k_1^n} + v_n = u_n,$$

d'où (puisque la série dont le terme général est $k_1^n v_n$ est convergente)

$$U_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} k_1^n u_n,$$

[Si la fonction $c(s)$ avait un signe quelconque, il pourrait arriver qu'on eût les deux pôles simples k_1 et $-k_1$; désignant alors par U_1 et U_{-1} les résidus correspondants, on aurait

$$U_1 + U_{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} k_1^{2n} u_{2n}, \quad U_1 - U_{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} k_1^{2n+1} u_{2n+1}.]$$

Le résidu U_1 est une solution du système homogène (3 bis) où l'on fait $k = k_1$; on le voit en portant (14) dans les équations (8) et annulant les résidus des identités ainsi obtenues.

On a ainsi établi l'existence du premier pôle k_1 . Le même procédé s'applique aux pôles suivants : il suffit d'établir que la série (14) des v a un rayon de convergence limité.

Si nous portons l'expression (14) dans (8), il viendra, comme con-

dition au contour,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left(\frac{U_1}{1 - \frac{k}{k_1}} \right) + \frac{d}{dn} \left(\frac{\alpha}{k} + \nu_0 + k\nu_1 + \dots \right) \\ + k c(s) \left(\frac{\alpha}{k} + \nu_0 + k\nu_1 + \dots \right) \\ + (k - k_1) c(s) \frac{U_1}{1 - \frac{k}{k_1}} + k_1 c(s) \frac{U_1}{1 - \frac{k}{k_1}} = f(s). \end{aligned}$$

Annulant le résidu du premier membre pour $k = k_1$, il vient

$$(15) \quad \frac{dU_1}{dn} + k_1 c(s) U_1 = 0,$$

comme nous l'avons déjà dit. Puis l'identification des diverses puissances de k donne

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dn} &= 0 \\ \frac{d\nu_0}{dn} + \alpha c(s) - k_1 c(s) U_1 &= f(s) \\ \frac{d\nu_1}{dn} + c(s) \nu_0 &= 0 \\ \frac{d\nu_2}{dn} + c(s) \nu_1 &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{sur } C),$$

relations tout à fait analogues aux relations (11), et qui se résoudront de même, puisqu'on a

$$\alpha \int c(s) ds = \int f(s) ds,$$

et aussi, d'après (15),

$$\int c(s) U_1 ds = 0.$$

On pourra donc recommencer la même analyse, et calculer la seconde valeur singulière k_2 et le résidu correspondant U_2 . L'emploi réitéré du même procédé permet donc d'établir que les valeurs singulières de k sont en nombre infini.

Remarque. — Tous les pôles k_i sont des pôles *simples* pour la fonction U ; il pourra cependant fort bien arriver qu'à une valeur singulière correspondent, pour le système homogène (3 bis), plusieurs solutions distinctes (c'est-à-dire non dans un rapport constant); ce fait pourra même se produire dès la première valeur singulière k_1 différente de zéro. Prenons par exemple pour contour C une circonférence de rayon 1 ayant l'origine pour centre et posons $c(s) = 1$. Le système (3 bis) admettra alors les solutions suivantes :

$$r^m \cos m\theta, \quad r^m \sin m\theta \quad (m \text{ entier } \geq 0)$$

(où l'on a posé $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$); les valeurs de k sont tous les entiers positifs m ; et à la valeur 1 correspondent les *deux* solutions

$$r \cos \theta, \quad r \sin \theta.$$

Dans la question actuelle, le *premier* pôle est, en réalité, $k = 0$, et à ce pôle correspond la solution *unique*, peu intéressante,

$$U = \text{const.},$$

qui garde un signe constant à l'intérieur de C ; d'ailleurs, réciproquement [si l'on suppose $c(s)$ positif], une solution du système (3 bis) positive dans et sur C est nécessairement constante et correspond à $k = 0$; c'est ce qui résulte de la condition évidente

$$\int_C \frac{dU}{dn} ds = 0,$$

qui s'écrit, d'après (3 bis),

$$k \int_C c U ds = 0,$$

condition qui, puisque $c(s)$ et U sont positifs, entraîne $k = 0$. Nous n'avons donc pas, dans le cas présent, l'équivalent du théorème démontré par M. Picard, au sujet d'un autre problème de Physique mathématique, relativement à la *première* valeur singulière du paramètre. [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 16 octobre 1893, et *Sur quelques applications de l'équation de Fredholm* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906, p. 259).]

Revenons maintenant au problème que nous avons primitivement en vue : nous venons d'établir l'existence d'une suite *indéfinie* de valeurs positives

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \dots, \quad k_i, \quad \dots,$$

auxquelles correspondent des solutions

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \dots, \quad U_i, \quad \dots,$$

pour le système (3 *bis*) ou (3) [ces solutions ne sont d'ailleurs déterminées qu'à un facteur constant près, puisque le système (3 *bis*) ou (3) est homogène].

Par conséquent, pour notre problème (1) des ondes par émergence, nous avons les solutions simples, en nombre infini,

$$\varphi_i = \sin(\sqrt{k_i} t) U_i(x, z).$$

Essayons de satisfaire au problème (1) par une série de la forme

$$\varphi = \sum \frac{c_i}{\sqrt{k_i}} \sin(\sqrt{k_i} t) U_i(x, z);$$

cette série satisfait aux trois premières conditions (1), puisque chaque terme y satisfait; il n'y a plus qu'à déterminer les constantes c_i de manière à vérifier les conditions d'état initial; la condition $\varphi = 0$ pour $t = 0$ est satisfaite d'elle-même; la seconde condition, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x)$ pour $t = 0$ et $z = 0$, s'écrit

$$(15 \text{ bis}) \quad \sum c_i U_i(x, 0) = f(x).$$

Il faut donc *admettre* que la fonction $f(x)$, définie à la surface du fluide, peut se développer en série de fonctions $U_i(x, 0)$ (et même que cette série est uniformément convergente, puisque nous avons différencié φ terme à terme). Si l'on admet que ce développement est possible, les coefficients c_i peuvent être calculés par le procédé d'élimination de Fourier. Je dis, en effet, qu'on a

$$\int_{(MN)} U_i(x, 0) U_j(x, 0) dx = 0 \quad (\text{pour } i \neq j),$$

l'intégrale étant étendue à toute la longueur MN de la surface libre du fluide (*fig.* 4); les fonctions harmoniques $U_i(x, z)$, $U_j(x, z)$, satisfont, en effet, au système (3), où k égale successivement k_i et k_j . Appliquant donc la formule de Green aux deux fonctions U_i et U_j dans tout le domaine MPNM, il vient

$$\iint (U_i \Delta_2 U_j - U_j \Delta_2 U_i) dx dz + \int \left(U_i \frac{dU_j}{dn} - U_j \frac{dU_i}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

l'intégrale simple étant étendue à toute la frontière; or $\Delta_2 U_i = \Delta_2 U_j = 0$; d'ailleurs, à la paroi courbe MPN, on a

$$\frac{dU_i}{dn} = \frac{dU_j}{dn} = 0;$$

et il reste

$$\int_{(MN)} \left(U_i \frac{dU_j}{dn} - U_j \frac{dU_i}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

où l'intégrale n'est étendue qu'à la partie horizontale MN; mais sur cette partie on a

$$\frac{dU_j}{dn} = -k_j U_j, \quad \frac{dU_i}{dn} = -k_i U_i,$$

et il vient finalement

$$(k_i - k_j) \int_{(MN)} U_i(x, 0) U_j(x, 0) dx = 0;$$

la formule est donc établie, dans le cas où $k_i \neq k_j$. Si d'ailleurs, à une même valeur singulière de k , correspondaient p solutions U , un procédé connu permettrait de former avec ces fonctions p combinaisons linéaires satisfaisant à la même condition d'orthogonalité, et ce sont ces combinaisons linéaires qu'il conviendrait d'appeler U_i .

Les coefficients c_i peuvent, par suite, se calculer par la formule de Fourier

$$c_i \int_{(MN)} [U_i(x, 0)]^2 dx = \int_{(MN)} U_i(x, 0) f(x) dx.$$

Les considérations qui précèdent résolvent le problème du mouvement plan d'un liquide pesant renfermé dans un vase de forme cylin-

drique dont les génératrices sont perpendiculaires au plan du mouvement. Toutefois nous avons, en chemin, rencontré deux difficultés. Il a d'abord fallu admettre que la fonction $f(x)$ donnée à la surface était développable en série de fonctions $U_i(x, 0)$; la seconde difficulté provient de la présence de deux points anguleux M et N sur le contour du domaine.

Pour ce qui est du développement en série, les théorèmes de M. Hilbert (*Göttinger Nachrichten*, 1904) qui ne considère que le cas d'un noyau *symétrique*, ou de M. Schmidt (*Mathematische Annalen*, t. LXIII) qui dans le cas d'un noyau dissymétrique considère deux séries de fonctions associées, ne trouvent pas leur application; la légitimité du développement semble néanmoins d'autant plus probable, qu'il est possible de démontrer que les $U_i(x, 0)$ forment un système *fermé*, c'est-à-dire que si la fonction *continue* $g(x)$ satisfait, quel que soit l'indice i , aux équations d'orthogonalité

$$(16) \quad \int_{(MN)} U_i(x, 0) g(x) dx = 0,$$

cela entraîne $g(x) = 0$ identiquement [condition qui, comme on sait, est nécessaire pour qu'une fonction arbitraire $f(x)$ soit développable en série de fonctions $U_i(x, 0)$]. Si l'on considère, en effet, le système

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_2 U = 0, \\ \frac{dU}{dn} = 0 & \text{(aux parois MPN),} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + kU = g(x) & \text{(à la surface horizontale MN),} \end{array} \right.$$

il serait facile de démontrer que la valeur *singulière* k_i n'est pas un pôle pour la solution de ce système, dans le cas et seulement dans le cas où le *second membre* $g(x)$ satisfait à

$$\int_{(MN)} g(x) U_i(x, 0) dx = 0,$$

où $U_i(x, z)$ désigne une quelconque des solutions du système (17) *sans second membre* [autrement dit du système (3)] où l'on fait $k = k_i$. Si donc $g(x)$ satisfaisait, quel que soit l'indice i , aux condi-

tions (16), l'intégrale du système (17) serait une fonction analytique de k n'admettant aucun pôle. Mais l'emploi des constantes W_n de Schwarz nous a prouvé l'existence effective d'une infinité de pôles; il est donc impossible qu'une fonction continue $g(x)$ non nulle satisfasse quel que soit i aux conditions (16), c'est dire que nos $U_i(x, 0)$ forment un système *fermé*. Cela permet, tout au moins, d'affirmer que la série (15 bis) représentera $f(x)$ toutes les fois qu'elle convergera uniformément.

Quant à la difficulté principale, celle relative aux pointes du contour, elle semble pénible à lever : on pourrait, il est vrai, faire la représentation conforme du domaine sur une aire sans singularités, par exemple sur un cercle; comme la représentation conforme change une fonction harmonique en une fonction harmonique, le problème se transformerait ainsi en un problème analogue, avec des conditions aux limites de même forme; mais des difficultés d'un autre ordre, et qui ne paraissent pas moins graves, apparaîtraient, du fait que le rapport de similitude, dans la représentation conforme, devient nul aux points qui correspondent aux points anguleux du contour.

II. — Mouvement à trois dimensions. Cas d'une profondeur infinie.

Si maintenant nous passons au cas du mouvement à trois dimensions, le liquide étant renfermé dans un vase de forme quelconque, il est clair que l'analyse précédente s'étend sans modification essentielle; la difficulté relative aux points anguleux du contour sera remplacée par la suivante : la surface frontière présentera une ligne fermée, en chaque point de laquelle elle admettra deux plans tangents distincts; et nous ne pourrons pas, cette fois, employer l'artifice d'une représentation conforme, faisant disparaître les singularités de la frontière.

Dans deux cas extrêmes, particulièrement intéressants, le problème se ramènera à un problème plan à deux dimensions; ces deux cas sont : 1° celui d'une profondeur infiniment petite; 2° le cas où, les parois étant exclusivement verticales, la profondeur est infinie. Le cas d'une profondeur infiniment petite a été traité par M. Poincaré dans son Cours sur la *Théorie des Marées*, je ne m'y arrêterai pas. J'étudierai

le cas du vase cylindrique vertical infiniment profond et de section droite quelconque; dans ce cas l'équation

$$(18) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

est vérifiée non seulement à la surface $z = 0$, mais dans tout le fluide; si nous posons, en effet,

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

cette fonction τ est harmonique, s'annule à la surface et aux grandes profondeurs, et a sa dérivée normale nulle aux parois latérales; donc elle est identiquement nulle. On pourrait alors différentier $(n-2)$ fois par rapport à t cette équation indéfinie (18), puis y faire $t = 0$, ce qui donnerait

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial t^{n-2}} \right)_0 = \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0;$$

et cette relation permettrait de calculer de proche en proche, en fonction des deux premiers, les coefficients d'un développement de Taylor

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{t}{1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 + \frac{t^2}{1.2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_0 + \dots + \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0 + \dots;$$

on en déduirait, comme nous l'avons fait dans la première Partie pour un liquide indéfini dans tous les sens, que la fonction φ est *analytique et entière en t*.

Mais on peut tirer un autre parti de l'équation indéfinie (18): en la combinant avec l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

nous en déduisons, comme dans la première Partie, la nouvelle équation indéfinie

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

qui nous permettra de ramener le problème à un problème *plan*.

Auparavant, faisons une remarque sur les conditions initiales : supposons, par exemple, que nous envisagions des ondes par émergence avec les données suivantes :

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y) \quad (\text{pour } t = 0 \text{ et } z = 0);$$

d'abord nous pouvons définir, à l'époque $t = 0$, les valeurs de φ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ dans tout le fluide, valeurs que nous appelons φ_0 et $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0$; ce sont, en effet, des fonctions harmoniques qui s'annulent aux grandes profondeurs, et dont la dérivée normale aux parois est nulle; elles sont donc entièrement définies par leurs valeurs à la surface; en particulier, on a

$$\varphi_0 = 0.$$

Ensuite, la relation de récurrence (19) nous permet de calculer $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}\right)_0$: on a

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0.$$

Plaçons-nous maintenant à un niveau fixe z ; nous aurons, pour déterminer φ à ce niveau, les équations suivantes, où z doit être regardé comme un paramètre :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Équation indéfinie :} \\ \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \\ \text{Condition à la frontière :} \\ \quad \frac{d\varphi}{dn} = 0; \\ \text{Conditions initiales, pour } t = 0 : \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0. \end{array} \right.$$

Nous sommes donc ramené à un problème *plan*; ce problème est d'ailleurs déterminé, puisqu'il équivaut au problème (1). Cherchons alors à satisfaire aux deux premières conditions (20) par des solutions

simples de la forme

$$\varphi = \frac{\sin}{\cos}(\sqrt{k}t) u(x, y);$$

il faudra que la fonction $u(x, y)$ satisfasse aux deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -k^2 u, \\ \frac{du}{dn} &= 0 \quad (\text{à la frontière}) \end{aligned}$$

(dont la première n'est autre que l'équation indéfinie des membranes vibrantes); or, si k^2 est quelconque, ces équations ne sont satisfaites que par $u = 0$; pour qu'elles aient une solution non nulle, il faut donner à k^2 certaines valeurs singulières, qui sont toutes positives, comme on le reconnaît aisément; ces valeurs singulières de k^2 pourraient se rattacher encore à une certaine équation de Fredholm.

Appelant $k_1^2, k_2^2, \dots, k_i^2, \dots$, ces valeurs singulières, et $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_i(x, y), \dots$, les fonctions correspondantes, nous essaierons de satisfaire au problème (20) par une série de la forme

$$\varphi = \sum \frac{c_i}{\sqrt{k_i}} \sin(\sqrt{k_i}t) e^{-k_i z} u_i(x, y),$$

où nous ne donnons aux k_i que leur valeur positive [une série analogue, avec des termes en $\cos(\sqrt{k_i}t)$, conviendrait aux ondes d'impulsion]. Une telle série satisfait aux deux premières conditions (20), puisque chaque terme y satisfait; d'ailleurs les deux conditions initiales

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

sont satisfaites d'elles-mêmes; enfin, les deux dernières conditions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

seront satisfaites *ensemble* si l'on a

$$\sum c_i e^{-k_i z} u_i(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0;$$

mais rappelons-nous que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0$ est la fonction harmonique, nulle aux grandes profondeurs, ayant sa dérivée normale nulle aux parois, et prenant à la surface $z = 0$ les valeurs données $f(x, y)$. Si donc nous *admettons* que la fonction $f(x, y)$ est développable en série de fonctions u_i ,

$$(21) \quad f(x, y) = \sum c_i u_i(x, y),$$

on aura précisément

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 = \sum c_i e^{-k_i z} u_i(x, y);$$

il suffira donc de déterminer les coefficients c_i par la condition (21); d'ailleurs, ils pourront être calculés par la méthode de Fourier, car on a

$$\iint u_i(x, y) u_j(x, y) dx dy = 0 \quad (i \neq j).$$

Nous avons donc mis la solution du problème sous la forme

$$(22) \quad \varphi = \sum \frac{c_i}{\sqrt{k_i}} \sin(\sqrt{k_i} t) e^{-k_i z} u_i(x, y);$$

chaque terme de la série est une fonction périodique, mais φ ne l'est pas, car les k_i ne sont pas commensurables entre eux, en général. Cette forme de φ nous montre que le mouvement ne s'éteint pas quand le temps t croît indéfiniment; il ne se dissémine pas en profondeur; chaque tranche horizontale oscille, en quelque sorte, pour son propre compte; dans le cas du fluide illimité dans tous les sens, nous avons trouvé que le mouvement s'éteint pour t infini; cela tient à ce que l'énergie se dissémine et s'étale *en surface*.

Remarquons que l'équation indéfinie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

peut s'interpréter comme nous l'avons fait pour le cas du fluide illi-

mité; elle exprime (aux quantités du second ordre près) que la quantité

$$z - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K$$

est indépendante de t ; mais $z - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ mesure la pression supportée par la particule fluide; cette pression est donc constante pendant tout le mouvement; pour avoir la signification de K , prenons la valeur moyenne des deux membres, pendant un temps très long T ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T z \, dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dt = K;$$

d'après (22), $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est une série de termes périodiques uniformément convergente (si z n'est pas nul); donc $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dt$ est très petit pour T très grand; cette dernière équation montre donc que K est la valeur moyenne de z ; par conséquent, on peut dire que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = z - \text{moy. de } z$$

représente la *dénivellation* de la particule.

Faisons l'application de la formule (22) aux formes les plus simples de la section droite du vase cylindrique. Dans le cas d'une section droite circulaire, les fonctions que nous avons appelées $u_i(x, y)$ prennent une forme simple; prenant, dans le plan des xy , des coordonnées polaires r, θ dont le pôle est le centre de la section droite, elles se réduisent au produit de $\cos m\theta$ ou $\sin m\theta$ par une fonction de Bessel $J_m(k_i r)$; la formule (22) permettrait alors de retrouver les résultats donnés autrefois par Ostrogradsky (*Mémoires des Savants étrangers*, t. III).

Dans le cas où la section droite serait un rectangle, limité par les droites $x = \pm l, y = \pm l'$, les fonctions $u(x, y)$ seraient de l'un des

quatre types suivants :

$$\begin{aligned} \cos \mu \frac{\pi x}{l} & \quad \cos \nu \frac{\pi y}{l'}, \\ \cos \mu \frac{\pi x}{l} & \quad \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi y}{l'}, \\ \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi x}{l} & \quad \cos \nu \frac{\pi y}{l'}, \\ \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi x}{l} & \quad \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi y}{l'}, \end{aligned}$$

où μ et ν sont deux entiers prenant toutes les valeurs de 0 à ∞ . Les coefficients c correspondants, calculés par le procédé de Fourier, sont respectivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{ll'} \int_{-l}^l \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) \cos \mu \frac{\pi \xi}{l} & \quad \cos \nu \frac{\pi \eta}{l'} d\xi d\eta, \\ \frac{1}{ll'} \int_{-l}^l \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) \cos \mu \frac{\pi \xi}{l} & \quad \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi \eta}{l'} d\xi d\eta, \\ \frac{1}{ll'} \int_{-l}^l \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi \xi}{l} & \quad \cos \nu \frac{\pi \eta}{l'} d\xi d\eta, \\ \frac{1}{ll'} \int_{-l}^l \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi \xi}{l} & \quad \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi \eta}{l'} d\xi d\eta; \end{aligned}$$

le second membre de la formule (21), qui donne le développement de $f(x, y)$, nous apparaît donc comme la somme de quatre séries, dont j'écris seulement la première :

$$\frac{1}{ll'} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \cos \mu \frac{\pi x}{l} \cos \nu \frac{\pi y}{l'} \int_{-l}^l \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) \cos \mu \frac{\pi \xi}{l} \cos \nu \frac{\pi \eta}{l'} d\xi d\eta.$$

(Il faut rappeler que, dans cette série, les termes où μ ou ν sont nuls doivent être affectés du coefficient $\frac{1}{2}$; celui où μ ou ν sont nuls, du coefficient $\frac{1}{4}$.)

Par conséquent, la formule (22) donnera pour φ la somme de

quatre séries dont j'écris seulement la première :

$$(23) \left\{ \varphi = \frac{1}{ll'} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\frac{\mu^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\nu^2 \pi^2}{l'^2}} t}{\sqrt{\frac{\mu^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\nu^2 \pi^2}{l'^2}}} e^{-\sqrt{\frac{\mu^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\nu^2 \pi^2}{l'^2}} z} \cos \mu \frac{\pi x}{l} \cos \nu \frac{\pi y}{l'} \right. \\ \left. \times \int_{-l}^l \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) \cos \mu \frac{\pi \xi}{l} \cos \nu \frac{\pi \eta}{l'} d\xi d\eta. \right.$$

Si nous faisons croître indéfiniment l et l' , nous devons retrouver le potentiel des vitesses correspondant au cas du fluide indéfini dans tous les sens; c'est ce qu'il est facile de vérifier : en effet, l et l' étant très grands, posons

$$\frac{\mu \pi}{l} = m, \quad \frac{\nu \pi}{l'} = n;$$

lorsqu'on passe d'un terme de la série au suivant, ces quantités m et n augmentent respectivement de $\Delta m = \frac{\pi}{l}$ et $\Delta n = \frac{\pi}{l'}$, qui deviennent, à la limite, des différentielles dm et dn . En sorte qu'il semble permis de remplacer, dans (23), le facteur $\frac{1}{ll'}$ par $\frac{dm dn}{\pi^2}$, puis de faire passer $dm dn$ sous le signe $\sum \sum$, et enfin de transformer cette somme en une intégrale double (c'est le calcul bien connu qui sert à passer de la *série* de Fourier à l'*intégrale* de Fourier). La formule (23) devient alors

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \frac{\sin \sqrt{m^2 + n^2} t}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{-\sqrt{m^2 + n^2} z} \cos m x \cos n y \cos m \xi \cos n \eta dm dn d\xi d\eta.$$

Les trois séries non écrites dans (23) donneront de même trois intégrales quadruples, qui se déduiront de la précédente en changeant

$$\cos m x \cos n y \cos m \xi \cos n \eta$$

respectivement en

$$\begin{aligned} & \cos m x \sin n y \cos m \xi \sin n \eta, \\ & \sin m x \cos n y \sin m \xi \cos n \eta, \\ & \sin m x \sin n y \sin m \xi \sin n \eta; \end{aligned}$$

comme la somme de ces quatre dernières quantités est égale à

$$\cos m(x - \xi) \cos n(y - \eta),$$

il viendra finalement pour φ

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \frac{\sin \sqrt[4]{m^2 + n^2} t}{\sqrt[4]{m^2 + n^2}} e^{-\sqrt{m^2 + n^2} z} \cos m(x - \xi) \cos n(y - \eta) dm dn d\xi d\eta;$$

nous reconnaissons l'intégrale trouvée par Poisson dans le cas d'un fluide indéfini (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. I, p. 137), intégrale que nous avons étudiée dans la première Partie, et identifiée avec celle de M. Boussinesq. Nous retrouvons donc, comme il le fallait bien, les formules s'appliquant à un liquide indéfini, comme cas particulier de celles relatives à un liquide renfermé dans un vase de forme quelconque.

Vu et approuvé :

Paris, 24 mars 1909.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, 24 mars 1909.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie de l'équation fonctionnelle de Fredholm.

Vu et approuvé :

Paris, le 24 mars 1909.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 24 mars 1909.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
43253 Quai des Grands-Augustins, 55.
